Komplexe Funktionen

14. 05. 2018

J. Behrens

① Transformation komplexer Gradienten:

- Wir haben: $\phi(x,y) = \psi(u(x,y), v(x,y))$

  wobei $u(x,y) = u(z)$, $v(x,y) = v(z)$, $u(z) + iv(z) = f(z)$

- Nach Kettenregel gilt:

$$\phi_x = \psi_u(u(x,y), v(x,y))\, u_x(x,y) + \psi_v(u(x,y), v(x,y))\, v_x(x,y)$$

$$\phi_y = \psi_u(u(x,y), v(x,y))\, u_y(x,y) + \psi_v(u(x,y), v(x,y))\, v_y(x,y)$$

- Also:

$$\mathrm{grad}(\phi) = \phi_x + i\phi_y = \psi_u(u_x + iu_y) + \psi_v(v_x + iv_y)$$

- Mit Cauchy-Riemannschen DGL ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$) gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(\phi) &= \psi_u(u_x - iv_x) + \psi_v(v_x + iu_x) \\ &= \psi_u(u_x - iv_x) + i\psi_v(u_x - iv_x) \\ &= (\psi_u + i\psi_v)(u_x - iv_x) = (\mathrm{grad}\,\psi)(u_x - iv_x) \end{aligned}$$

- Erinnerung: $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z)$

  $\overline{f'(z)} = u_x(x) - iv_x(z)$

- Insgesamt:

$$\mathrm{grad}(\phi(z)) = \mathrm{grad}(\psi(z)) \cdot \overline{f'(z)} \quad \text{mit } w = f(z).$$

② Laplace-Operator:

- Wende wieder die Kettenregel an:

$$\phi_{xx} = \psi_{uu}(u_x)^2 + 2\psi_{uv}(u_x v_x) + \psi_{vv}(v_x)^2 + \psi_u u_{xx} + \psi_v v_{xx}$$

$$\phi_{yy} = \psi_{uu}(u_y)^2 + 2\psi_{uv}(u_y v_y) + \psi_{vv}(v_y)^2 + \psi_u u_{yy} + \psi_v v_{yy}$$

- Addition:

$$\Delta_z \phi = \psi_{uu}[(u_x)^2 + (u_y)^2] + 2\psi_{uv}[u_x v_x + u_y v_y] + \psi_{vv}[(v_x)^2 + (v_y)^2] + \\ + \psi_u[\Delta_z u] + \psi_v[\Delta_z v]$$

- Verwende Cauchy-Riemannsche DGL:

$$\Delta_z \phi = (\psi_{uu} + \psi_{vv})|f'(z)|^2 + \psi_u \Delta_z u + \psi_v \Delta_z v$$

mit $|f'(z)|^2 = (u_x(z))^2 + (v_x(z))^2$

- Es gilt mit den Cauchy-Riemannschen DGLn:

$$u_{xx} = v_{yx} \quad \text{und} \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

$$\Rightarrow \Delta_z u = u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{xy} = 0$$

analog für $\Delta_z v$.

- Insgesamt: $\Delta_z \phi = \Delta_w \psi \cdot |f'(z)|^2$

③ Beweis:

- Sei $u = u(x,y)$ sei harmonisch, d.h. $\Delta u = 0$.
- Gesucht: $v = v(x,y)$, so dass $v_x = -u_y$ und $v_y = u_x$
  (Cauchy-Riemannschen DGL)
- Denn dann: $\text{grad}(v) = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x) =: V = (V_1, V_2)$

  und $\text{rot}(V) = \text{rot}(\text{grad}(v)) = \dfrac{\partial V_2}{\partial x} - \dfrac{\partial V_1}{\partial y} = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ⊛
- Wir suchen ein Potential v mit $\text{grad}(v) = V$.
- Aus Analysis III wissen wir, dass mit ⊛ ein solches Potential existiert $\boxtimes$

④ Lösung des Dirichlet-Problems:

- Entsprechend der Lösungsidee:
  Bilde G bijektiv und konform auf Einheitskreis S_1 ab.
- Unter geeigneten Bedingungen ist dies mit einer analytischen Fkt. f möglich:

$$\psi(w) = \phi(f^{-1}(w)) \quad \text{für } w \in \{|w| \leq 1\} = S_1$$

$\uparrow$ $\nwarrow$ Temperatur

"transformierte Temperatur"

- Im Inneren von S_1 erfüllt Ψ die Laplace-Gleichung

$$\Delta \Psi = 0 \qquad \text{für } |w| < 1$$

- Auf dem Rand $\Gamma = \partial S_1$ des Kreises gilt:

$$\psi(e^{i\vartheta}) = \psi_0(e^{i\vartheta}) = \Phi_0(f^{-1}(e^{i\vartheta})) \qquad (0 \leq \vartheta < 2\pi)$$

- Erhalte eine einfachere Aufgabe: Löse Dirichlet-Problem für ψ auf S_1

- Sei ψ_0 hinreichend glatt und als komplexe Fourier-Reihe entwickelt

$$\psi_0(e^{i\vartheta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\vartheta} \qquad \text{mit}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_0(e^{i\vartheta}) e^{-in\vartheta} \, d\vartheta$$

- Die Lösung von $\Delta\psi = 0$ auf S_1, $\psi(z) = \psi_0(z)$ auf Γ kann dann direkt angegeben werden:

$$\psi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^{|n|} e^{in\vartheta} \qquad \text{für } w = \rho e^{i\vartheta} \text{ mit } 0 \leq \rho \leq 1$$

- Rücktransformation: Die Lösung des ursprünglichen Problems ist also

$$\Phi(z) = \psi(f(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n |\varphi|^{|n|} e^{in\vartheta} \quad \text{mit } \varphi = \arg(f(z))$$