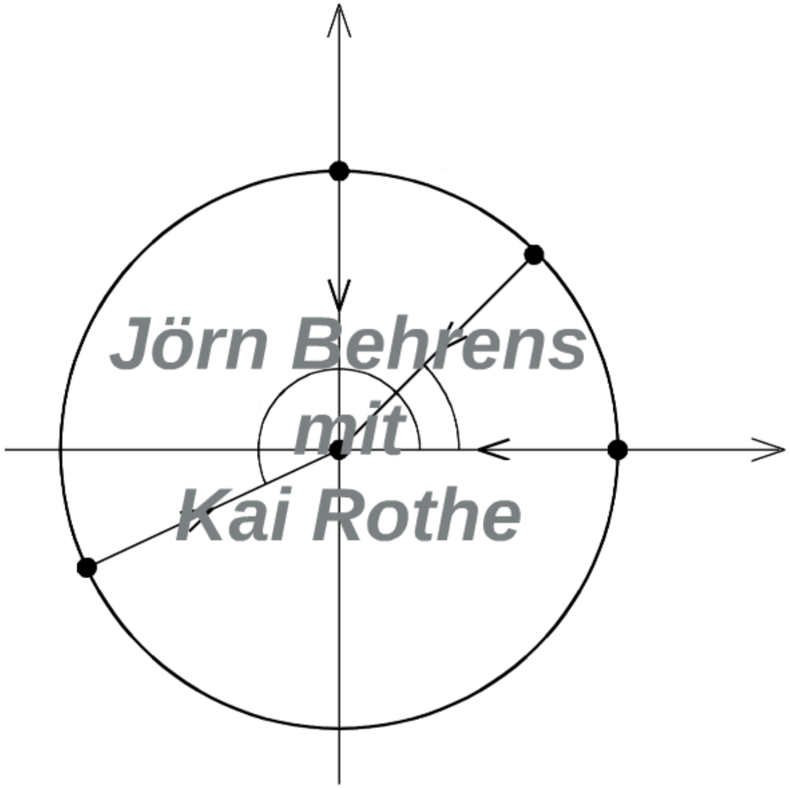
Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Stereographische und Möbius Transformation

Vorbemerkungen

Vorbemerkung: (Rationale Funktion)
Wir werden im folgenden Rationale Funktionen der Form

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

mit Polynomen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ untersuchen.
Für die Nullstellen von $q(z)$ ist R nicht definiert.

Vereinbarungen:

- Schließe *Lücken* im Definitionsbereich von R durch:

$$R(z) := \infty, \quad \text{falls } q(z) = 0 \ (\cong\times\ p(z) \neq 0).$$

- Wir definieren die Erweiterung der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
- Wir nennen ∞ den unendlich fernen Punkt.

Bemerkung: (Rechenregeln für $\mathbb{C}^*$)
Zusätzlich zu den üblichen Rechenregeln in $\mathbb{C}$ vereinbaren wir für $\mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} a + \infty &:= \infty && \text{für } a \in && \mathbb{C} \\ a \cdot \infty &:= \infty && \text{für } a \in && \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ \frac{a}{\infty} &:= 0 && \text{für } a \in && \mathbb{C} \end{aligned}$$

Achtung: Die Verknüpfungen $0 \cdot \infty$ und $\infty \pm \infty$ lassen sich nicht widerspruchsfrei definieren!

Bemerkung: (Topologische Bedeutung)

- Die erweiterte komplexe Ebene $\mathbb{C}^*$ ist ein topologischer Raum.
- Für eine komplexe Zahlenfolge $\{z_n\}_n$, $z_n \neq 0$ gilt

$$z_n \to \infty \ (n \to \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z_n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

- $\mathbb{C}^*$ ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in $\mathbb{C}^*$ besitzt einen Häufungspunkt.
- Wir bezeichnen $\mathbb{C}^*$ als Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$.

Vorbemerkung: (Rationale Funktion)
Wir werden im folgenden Rationale Funktionen der Form

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

mit Polynomen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ untersuchen.
Für die Nullstellen von $q(z)$ ist R nicht definiert.

Vereinbarungen:

- Schließe *Lücken* im Definitionsbereich von R durch:

$$R(z) := \infty, \quad \text{falls } q(z) = 0 \; (\approxeq\!\ltimes \; p(z) \neq 0).$$

- Wir definieren die Erweiterung der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

- Wir nennen ∞ den unendlich fernen Punkt.

Bemerkung: (Rechenregeln für $\mathbb{C}^*$)
Zusätzlich zu den üblichen Rechenregeln in $\mathbb{C}$ vereinbaren wir für $\mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} a+\infty &:= \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{C} \\ a\cdot\infty &:= \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ \frac{a}{\infty} &:= 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Achtung: Die Verknüpfungen $0\cdot\infty$ und $\infty\pm\infty$ lassen sich nicht widerspruchsfrei definieren!

Bemerkung: (Topologische Bedeutung)

- Die erweiterte komplexe Ebene $\mathbb{C}^*$ ist ein topologischer Raum.
- Für eine komplexe Zahlenfolge $\{z_n\}_n$, $z_n \neq 0$ gilt

$$z_n \to \infty \ (n \to \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z_n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

- $\mathbb{C}^*$ ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in $\mathbb{C}^*$ besitzt einen Häufungspunkt.
- Wir bezeichnen $\mathbb{C}^*$ als Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$.

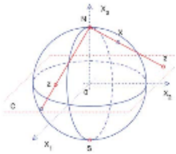
Stereographische Projektion

Definition: (Stereographische Projektion)
Die Abbildung $P : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^*$ die jedem $X \in \mathbb{S}^2$, $X \neq N = (0,0,1)^\top$ den *Durchstoßpunkt* $P(X)$ der Geraden durch X und N durch die X_1-X_2-Ebene zuordnet, mit $P(N) = \infty$, heißt stereographische Projektion.

Dabei ist $\mathbb{S}^2 := \{X \in \mathbb{R}^3 : \|X\| = 1\}$ die Riemannsche Zahlenkugel.

Bemerkungen:

- Die stereographische Projektion kann explizit angegeben werden:
$$z = P(X) = \frac{X_1 + iX_2}{1 - X_3} \in \mathbb{C}^* \quad \text{für } X = (X_1, X_2, X_3)^\top \in \mathbb{S}^2.$$
- Die stereographische Projektion $P : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^*$ ist bijektiv.
- Die Umkehrabbildung P^{-1} von P ist gegeben durch
$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}\right)^\top \in \mathbb{S}^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^*.$$



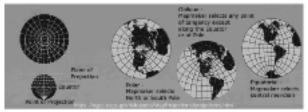
Geometrische Interpretation:

- Die obere Halbkugel von $\mathbb{S}^2$ wird auf $|z| > 0$ abgebildet.
- Die untere Halbkugel von $\mathbb{S}^2$ wird auf $|z| < 0$ abgebildet.
- Der Äquator wird auf sich selbst abgebildet, $a \in A$ ist Fixpunkt $P(a) = a$. Dabei ist
$$A := \{X \in \mathbb{S}^2 : X = (X_1, X_2, 0)^\top\}.$$

Notation: (Sphärisches Bild)
Das sphärische Bild $U \in \mathbb{S}^2$ einer Menge $B \in \mathbb{C}^*$ sei das Urbild der stereographischen Projektion, so dass $P(U) = B$.

Satz: *Für die stereographische Projektion gelten folgende Eigenschaften.*

- *Das sphärische Bild einer Geraden in $\mathbb{C}^*$ ist ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der durch N geht.*
- *Ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der durch N geht, wird durch die stereographische Projektion auf eine Gerade in $\mathbb{C}^*$ abgebildet.*
- *Das sphärische Bild eines Kreises in $\mathbb{C}$ ist ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der nicht durch N geht.*
- *Ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der nicht durch N geht, wird durch die stereographische Projektion auf einen Kreis in $\mathbb{C}$ abgebildet.*
- *Die stereographische Projektion ist* `kreistreu`.



Definition: (Stereographische Projektion)
Die Abbildung $P : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^*$ die jedem $X \in \mathbb{S}^2$, $X \neq N = (0,0,1)^\top$ den *Durchstoßpunkt* $P(X)$ der Geraden durch X und N durch die X_1-X_2-Ebene zuordnet, mit $P(N) = \infty$, heißt stereographische Projektion.

Dabei ist $\mathbb{S}^2 := \{X \in \mathbb{R}^3 : \|X\| = 1\}$ die Riemannsche Zahlenkugel.

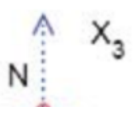
Bemerkungen:

- Die stereographische Projektion kann explizit angegeben werden:

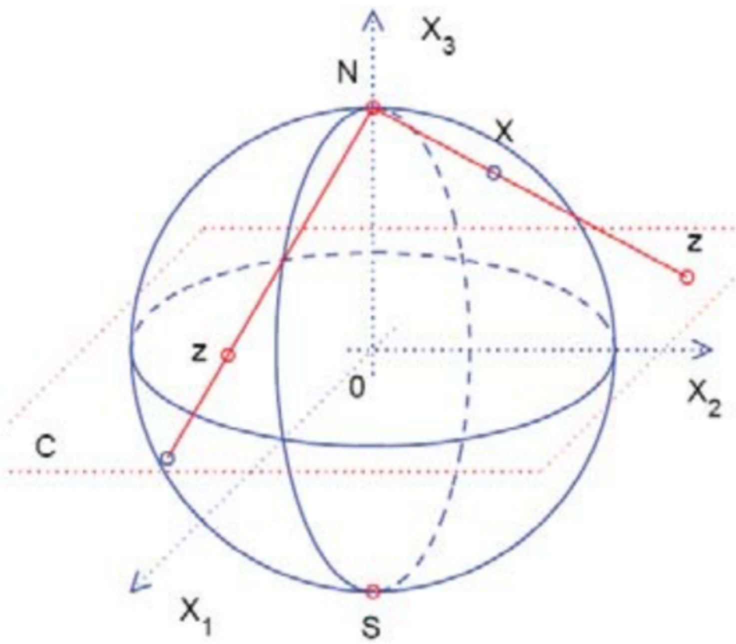
$$z = P(X) = \frac{X_1 + iX_2}{1 - X_3} \in \mathbb{C}^* \quad \text{für } X = (X_1, X_2, X_3)^\top \in \mathbb{S}^2.$$

- Die stereographische Projektion $P : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^*$ ist bijektiv.
- Die Umkehrabbildung P^{-1} von P ist gegeben durch

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^\top \in \mathbb{S}^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^*.$$



X =



Geometrische Interpretation:

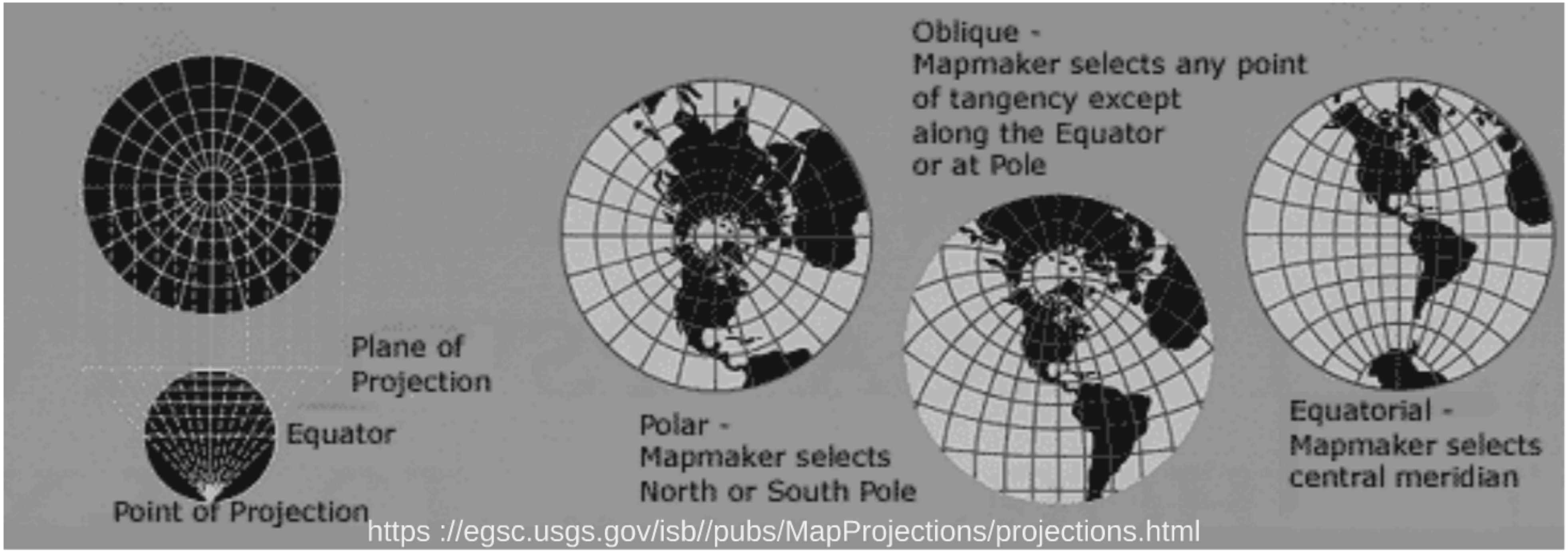
- Die obere Halbkugel von $\mathbb{S}^2$ wird auf $|z| > 0$ abgebildet.
- Die untere Halbkugel von $\mathbb{S}^2$ wird auf $|z| < 0$ abgebildet.
- Der Äquator wird auf sich selbst abgebildet, $a \in A$ ist Fixpunkt $P(a) = a$. Dabei ist
$$A := \{X \in \mathbb{S}^2 : X = (X_1, X_2, 0)^\top\}.$$

Satz: *Für die stereograp*

Notation: (Sphärisches Bild)
Das sphärische Bild $U \in \mathbb{S}^2$ einer Menge $B \in \mathbb{C}^*$ sei das Urbild der stereographischen Projektion, so dass $P(U) = B$.

Satz: *Für die stereographische Projektion gelten folgende Eigenschaften.*

- *Das sphärische Bild einer Geraden in* $\mathbb{C}^*$ *ist ein Kreis auf* $\mathbb{S}^2$, *der durch* N *geht.*
- *Ein Kreis auf* $\mathbb{S}^2$, *der durch* N *geht, wird durch die stereographische Projektion auf eine Gerade in* $\mathbb{C}^*$ *abgebildet.*
- *Das sphärische Bild eines Kreises in* $\mathbb{C}$ *ist ein Kreis auf* $\mathbb{S}^2$, *der nicht durch* N *geht.*
- *Ein Kreis auf* $\mathbb{S}^2$, *der nicht durch* N *geht, wird durch die stereographische Projektion auf einen Kreis in* $\mathbb{C}$ *abgebildet.*
- *Die stereographische Projektion ist* `kreistreu`.


Plane of Projection
Equator
Point of Projection
Polar - Mapmaker selects North or South Pole
Oblique - Mapmaker selects any point of tangency except along the Equator or at Pole
Equatorial - Mapmaker selects central meridian
https ://egsc.usgs.gov/isb//pubs/MapProjections/projections.html

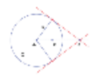
Möbius Transformation

Definition: (Möbius Transformation)
Eine rationale Abbildung der Form

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit } ad \neq bc$$

heißt Möbius Transformation.

Symmetrie zum Kreis.



Die Punkte z und z' liegen symmetrisch zum Kreis C.

Satz: (Möbius-Transformationen und Kreissymmetrien)
Möbius-Transformationen erhalten Symmetrien zu (verallgemeinerten) Kreisen.

Genauer: Ist C ein (verallgemeinerter) Kreis in $\mathbb{C}^*$ und liegen z und z' symmetrisch zu C, so liegen die Bilder $w = T(z)$ und $w' = T(z')$ unter einer Möbius-Transformation symmetrisch zu demjenigen (verallgemeinerten) Kreis in $\mathbb{C}^*$, der das Bild von C darstellt.

2

Satz: (Doppelverhältnisse und Möbius Transformationen)

$$w_j = T(z_j) \quad (j = 1, 2, 3)$$

Die interpolierende Möbius Transformation $T(z)$ ist gegeben durch die Dreipunkteformel

Definition: (Doppelverhältnis)
Der Ausdruck

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

heißt das Doppelverhältnis der Punkte z_0, z_1, z_2, z_3.

Satz: (Kreistreue von Möbius Transformationen)
Möbius Transformationen sind kreistreu.
Bemerkung: (Verallgemeinerte) Kreise in $\mathbb{C}^*$ gehen durch Möbius Transformation in (verallgemeinerte) Kreise über.

1

Bemerkungen: (Weitere Eigenschaften der Möbius Transformation)
Für eine Möbius Transformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit } ad \neq bc$$

gelten folgende Eigenschaften:

- (Verallgemeinerte) Kreise durch den Punkt $\frac{-d}{c}$ werden durch T auf Geraden in der w-Ebene abgebildet.
- Alle Geraden der z-Ebene werden durch T in (verallgemeinerte) Kreise der w-Ebene durch den Punkt $\frac{a}{c}$ abgebildet.
- Kreise, die nicht durch $\frac{-d}{c}$ gehen, werden durch T in Kreise abgebildet, die nicht durch $\frac{a}{c}$ gehen.

Definition: (Möbius Transformation)
Eine rationale Abbildung der Form

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad \neq bc$$

heißt Möbius Transformation.

Bemerkung: (Eigenschaften der Möbius Transformation)
Für eine Möbius Transformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ gilt:

- Zähler und Nenner haben verschiedene Nullstellen (folgt aus $ad \neq bc$).
- $T(\frac{-d}{c}) = 0$ und $T(\infty) = \frac{a}{c}$.
- $T(z)$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $T^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ und $T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$

Bemerkung: (Möbius Transformation und Matrix)
Eine Möbius Transformation $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ entspricht einer Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Bemerkung: Die Matrix ist invertierbar, da $ad \neq bc$. Für die Inverse Abbildung:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Satz: (Komposition von Möbius Transformationen)
Die Komposition zweier Möbius Transformationen ist eine Möbius Transformation.

Genauer gilt:

$$\begin{aligned} w = T_1(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{für } ad \neq bc \\ u = (T_2 \circ T_1)(z) = T_2(w) &= \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} \quad \text{für } \alpha\delta \neq \beta\gamma \\ &= \frac{Az+B}{Cz+D} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Satz: (Kreistreue von Möbius Transformationen)
Möbius Transformationen sind kreistreu.

Bemerkung: (Verallgemeinerte) Kreise in $\mathbb{C}^*$ gehen durch Möbius Transformation in (verallgemeinerte) Kreise über.

1

Bemerkungen: (Weitere Eigenschaften der Möbius Transformation)
Für eine Möbius Transformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit } ad \neq bc$$

gelten folgende Eigenschaften:

- (Verallgemeinerte) Kreise durch den Punkt $\frac{-d}{c}$ werden durch T auf Geraden in der w-Ebene abgebildet.

- Alle Geraden der z-Ebene werden durch T in (verallgemeinerte) Kreise der w-Ebene durch den Punkt $\frac{a}{c}$ abgebildet.

- Kreise, die nicht durch $\frac{-d}{c}$ gehen, werden durch T in Kreise abgebildet, die nicht durch $\frac{a}{c}$ gehen.

Definition: (Doppelverhältnis)
Der Ausdruck

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

heißt das Doppelverhältnis der Punkte z_0, z_1, z_2, z_3.

Satz: (Doppelverhältnisse und Möbius-Transformationen)
Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ jeweils paarweise verschieden. Dann gibt es genau eine Möbius Transformation $w = T(z$, die die Interpolationsbedingungen

$$w_j = T(z_j) \quad (j = 1, 2, 3)$$

erfüllt.

Die interpolierende Möbius Transformation $T(z)$ ist gegeben durch die Dreipunkteformel

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Beispiel

Gesucht:

Eine Möbius-Transformation $T(z)$ mit $T(1) = i$, $T(i) = -i$ und $T(0) = 0$.

Nach der Dreipunkteformel bekommt man

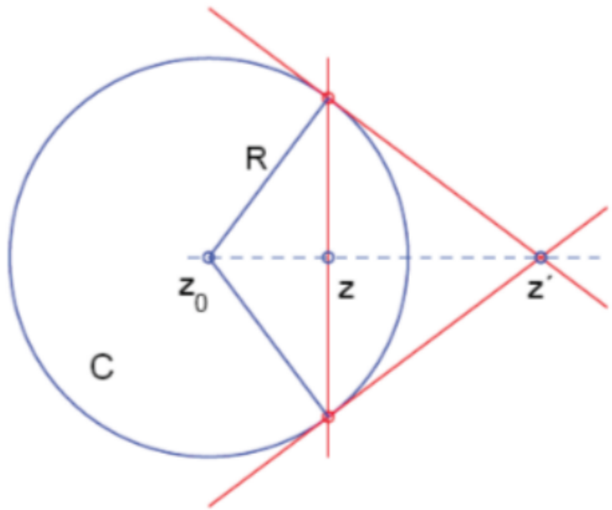
$$\frac{w-i}{w+i} : \frac{0-i}{0+i} = \frac{z-1}{z-i} : \frac{0-1}{0-i}$$

und somit (durch Auflösen nach w)

$$w = T(z) = \frac{(1+i)z}{(1+i)z-2i}.$$

Symmetrie zum Kreis.

Liegen die Punkte z und z' wie in der folgenden Abbildung, so sagt man, die Punkte z und z' liegen symmetrisch zum Kreis $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$.



Die Punkte z und z' liegen symmetrisch zum Kreis C.

Bemerkungen zu Symmetrien zum Kreis.

- Die Abbildung $z \to z'$ heißt `Inversion am Kreis` bzw. `Spiegelung am Kreis`.
- Ein Punkt z mit $|z - z_0| \leq R$ ist stets zu einem Punkt z' mit $|z' - z_0| \geq R$ symmetrisch.
- Gilt $|z - z_0| = R$, so ist z zu sich selbst symmetrisch, d.h. $z' = z$.
- Der Punkt $z = z_0$ ist zu $z' = \infty$ symmetrisch.
- Es gilt $(z - z_0)\overline{(z' - z_0)} = R^2$.

Satz: (Möbius-Transformationen und Kreissymmetrien)
Möbius-Transformationen erhalten Symmetrien zu (verallgemeinerten) Kreisen.

Genauer: Ist C ein (verallgemeinerter) Kreis in $\mathbb{C}^*$ und liegen z und z' symmetrisch zu C, so liegen die Bilder $w = T(z)$ und $w' = T(z')$ unter einer Möbius-Transformation symmetrisch zu demjenigen (verallgemeinerten) Kreis in $\mathbb{C}^*$, der das Bild von C darstellt.

2

Möbius Transformation

Stereographische Projektion

Komplexe Funktionen

Vorbemerkungen