Komplexe Funktionen

23.04.2018

J. Behrens

① zum komplexen Logarithmus:

- Ausgangspunkt: Sei $z = x + iy \in W(\exp)$
  Es soll gelten: $e^w = z$ für $w = u + iv \in \mathbb{C}$

- Dann: $|e^w| = |e^u| = |z|$
  also $u = \log(|z|)$ (reeller $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$)

- Außerdem: $\arg(e^w) = \arg(e^{u+iv}) = \arg(e^u e^{iv}) = v$
  also $v = \arg(z)$

- Die Menge der Lösungen von $e^w = z$ besteht aus $w \in \mathbb{C}$:
  $w = \log(|z|) + i(\arg(z) + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$

- Jedes $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = z$ heißt Logarithmus von z.

- Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet
  $$\{\mathrm{Log}(z)\} := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$$
  den mengenwertigen komplexen Logarithmus von z.

- Beispiel: $\{\mathrm{Log}(-1)\}$
  - Es gilt $\log(|-1|) = \log(1) = 0$
  - $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$ sind Argumente von -1.

  $\Rightarrow \{\mathrm{Log}(-1)\} = \{ i(2k+1)\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \}$.

- Beispiel: $\{\mathrm{Log}(x)\}$ $\quad x > 0$:

$$\{\mathrm{Log}(x)\} = \{ \log(x) + 2\pi i k \ : \ k \in \mathbb{Z} \}$$

② Beispiele für $\{a^b\}$:

- Sei $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b = n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\{a^b\} &= \{ e^{n(\log(r) + i\alpha + 2\pi i k)} : k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ e^{n\log(r) + in\alpha + 2\pi i k n} : k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ r^n e^{in\alpha} e^{2\pi i n k} : k \in \mathbb{Z} \}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (re^{i\alpha})^n = r^n e^{in\alpha} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

- Sei $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ wie eben.

$$\{a^{\frac{1}{n}}\} = \{e^{\frac{1}{n}(\log(r) + i\alpha + 2\pi i k)} : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\alpha}{n}} e^{\frac{2\pi i k}{n}} : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\alpha}{n}} e^{\frac{2\pi i k}{n}} : 0 \le k < n\}$$

$\Rightarrow$ Die Werte von $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ sind die n-ten Wurzeln von a, so dass $z^n = a$

$\Rightarrow$ $z = \sqrt[n]{a}$

mit Hauptwert $r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\alpha}{n}}$ für $\frac{\alpha}{n} = \frac{\arg(a)}{n} \in [-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}]$

③ Geometrische Interpretation der Joukowsky-Funktion

- sei $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$, betrachte $w = f(z)$.

$\rightarrow$ $u + iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)$

- Also $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi$

$v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$

- Das Bild eines Kreises $r \equiv r_0 > 0$:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\cos\varphi \\ v &= \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$\rightarrow$ Für den Einheitskreis $r_0 = 1$:

$$u = \cos\varphi \quad , \quad v = 0$$

$\rightarrow$ Strecke $[-1, 1]$ wird zweimal durchlaufen.

- $r_0 \neq 1$: φ lässt sich eliminieren und man erhält die Ellipse:

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)^2} = 1$$

mit Halbachsen

$$a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right) \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)$$

und Brennpunkten ± 1

- Eine Kreisschaar wird auf eine Schaar von konfokalen Ellipsen abgebildet.

- Für das Bild eines Strahls $\varphi \equiv \varphi_0$ erhalte

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi_0 \\ v &= \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi_0 \end{aligned}\right\} \quad 0 < r < \infty$$

→ Für die positive x-Achse $\varphi_0 = 0$

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad v = 0, \quad r \in]0,\infty[$$

→ $\{(u,0) : 1 \leq u \leq \infty\}$

- Analog: – negative x-Achse ($\varphi_0 = \pi$)

  → $\{(u,0) : -\infty < u < -1\}$

  – Strahlen $\frac{\pi}{2}$ (positive y-Achse)

  $\frac{3\pi}{2}$ (negative y-Achse)

  → komplette v-Achse

- Für $\varphi_0 \notin \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ eliminiere r, erhalte Hyperbel

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0} = 1$$

mit Halbachsen

$$a = |\cos\varphi_0|, \quad b = |\sin\varphi_0|$$

mit Brennpunkten ± 1