**Aufgabe 1:** (5+4+1 Punkte)

a) Für eine Möbius-Transformation $T$ gelte

$$T(0) = -2\,, \quad T(i) = 0 \quad \text{und} \quad T(-i) = \infty\,.$$

(i) Für die Abbildung $T$ gebe man das Bild der imaginären Achse an.

(ii) Man bestimme das Bild der reellen Achse bezüglich der Abbildung $T$. (Tipp: $i$ und $-i$ liegen symmetrisch zu $\mathbb{R}$.)

(iii) Man berechne $T$.

b) Gegeben sei die durch $u(x,y) = x^2 - x - 2 - y^2 + \cos x \sinh y$ definierte Funktion.

(i) Man zeige, dass $u$ harmonisch ist.

(ii) Man konstruiere eine Funktion $v(x,y)$, so dass die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

(iii) Ist $v$ harmonisch?

c) Man berechne $\displaystyle\int_c \frac{z^2}{\bar{z}}\,dz$ mit $c = \{c(t) = e^{it} \;:\; -\pi/4 \le t \le \pi/2\}$.

**Aufgabe 2:** (1+6+3 Punkte)

a) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z+1|=3} \frac{e^{2z}}{(z-1)^4}\,dz$ für die einfach mathematisch positiv durchlaufene Kurve $|z+1| = 3$.

b) Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{2}{z-1} + \dfrac{4}{3-z}$ definierte Funktion.

(i) Zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ berechne man alle Potenzreihenentwicklungen von $f$ und skizziere deren Konvergenzbereiche.

(ii) Man bestimme den Typ aller Singularitäten von $f$ und gebe die zugehörigen Residuen.

(iii) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z|=4} f(z)dz$ für die einfach mathematisch positiv durchlaufene Kurve $|z| = 4$.

c) Gegeben sei die durch $g(z) = (z+1)^2 \sin\left(\dfrac{1}{z+1}\right)$ definierte Funktion.

(i) Man bestimme die um $z_0 = -1$ konvergente Laurent-Reihe von $g$.

(ii) Man klassifiziere alle Singularitäten von $g$ und berechne deren Residuen.

(iii) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z|=2} g(z)dz$ für die einfach mathematisch positiv durchlaufene Kurve $|z| = 2$.