

### 3. Möbius-Transformationen

#### A. Die stereographische Projektion

Bei der Untersuchung rationaler Funktionen auf  $\mathbb{C}$  erweist es sich als zweckmäßig, die Lücken des Definitionsbereiches (= Nullstellen des Nenners) dadurch zu schließen, dass man der Funktion dort den Wert  $\infty$  zuordnet (sofern nicht zugleich der Zähler verschwindet). Man definiert

**Definition:**

$\infty$  : unendlich ferner Punkt

$$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

## Rechenregeln:

$$a + \infty := \infty, \quad a \cdot \infty := \infty \quad (a \neq 0), \quad a/\infty := 0$$

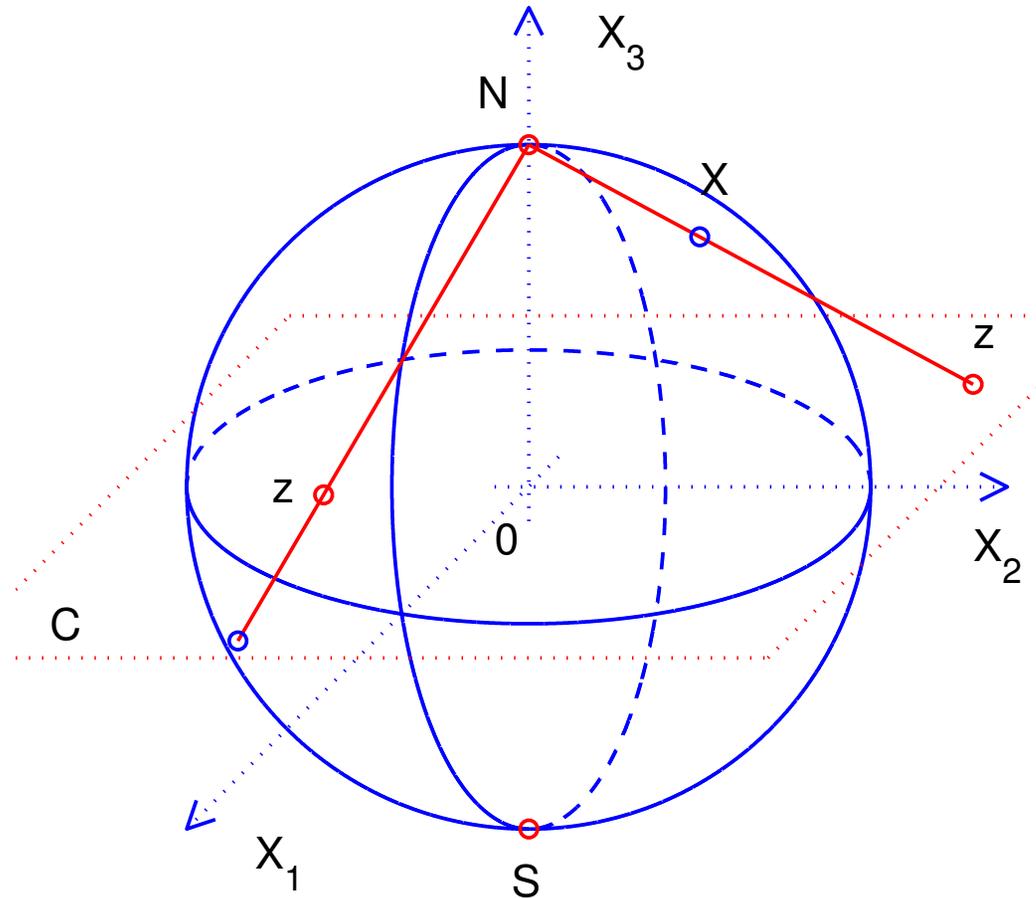
**Warnung:**  $0 \cdot \infty$  und  $\infty \pm \infty$  lassen sich nicht sinnvoll definieren.

$\mathbb{C}^*$  ist ein topologischer Raum, eine Umgebungsbasis von  $\infty$  ist durch die Komplemente von  $\varepsilon$ -Kugeln gegeben.

Es gilt dann für eine Folge  $z_n \in \mathbb{C}$ ,  $z_n \neq 0$ :

$$z_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \iff 1/z_n \rightarrow 0.$$

$\mathbb{C}^*$  ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in  $\mathbb{C}^*$  besitzt einen Häufungspunkt. Man nennt  $\mathbb{C}^*$  daher auch die **Einpunkt-Kompaktifizierung** von  $\mathbb{C}$ .



**Abb 3.1. Stereographische Projektion**

Die stereographische Projektion ist eine Abbildung der Riemannschen Zahlenkugel  $S^2 := \{X \in \mathbb{R}^3 : \|X\| = 1\}$  auf die erweiterte komplexe Ebene  $\mathbb{C}^*$ . Sie ordnet einem Punkt  $X \in S^2$ ,  $X \neq N$  den Durchstoßpunkt der Geraden durch  $X$  und  $N$  durch die  $z = (x, y)$ -Ebene zu. Ferner:  $P(N) := \infty$ .

### Analytische Darstellung (3.1):

$$z = P(X) = \frac{X_1 + iX_2}{1 - X_3}$$

$$X = P^{-1}(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T$$

Die stereographische Projektion  $P : S^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$  ist **bijektiv**. Die obere Kugelhälfte wird auf  $|z| > 1$  abgebildet, die untere auf  $|z| < 1$ . Der Äquator bleibt fest.

### Satz (3.2) (Kreistreue)

- Das sphärische Bild (= Urbild unter der stereographischen Projektion) einer Geraden in  $\mathbb{C}^*$  (einschließlich des Punktes  $\infty$ ) ist ein Kreis auf  $S^2$ , der durch  $N$  geht. Und umgekehrt!
- Das sphärische Bild eines Kreises in  $\mathbb{C}$  ist ein Kreis auf  $S^2$ , der nicht durch  $N$  geht. Und umgekehrt!

**Beweis:** Durch direktes Nachrechnen mittels (3.1).  $\square$

Kreise und Geraden in  $\mathbb{C}^*$  werden als **verallgemeinerte Kreise** in  $\mathbb{C}^*$  bezeichnet. Nach obigem Satz gehen also verallgemeinerte Kreise in  $\mathbb{C}^*$  unter der (inversen) stereographischen Projektion in Kreise der Riemannsches Zahlenkugel über.

## B. Möbius-Transformationen.

Rationale Abbildungen der Form

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad \neq bc. \quad (3.3)$$

heißen Möbius-Transformationen.

- Zähler und Nenner haben verschiedene Nullstellen.
- $T$  wird als Abbildung  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  interpretiert. Dabei ist  $T(-d/c) := \infty$ ,  $T(\infty) := a/c$ .
- $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  ist bijektiv mit der Umkehrung:

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Merke: 
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} !$$

- Die Hintereinanderausführung von Möbius-Transformationen ist wieder eine Möbius-Transformation:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad \neq cb$$

$$u = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \quad \alpha\delta \neq \gamma\beta$$

$$\Rightarrow u = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

### Satz (3.4) (Kreistreue)

Möbius-Transformationen sind kreistreu, d.h. verallgemeinerte Kreise in  $\mathbb{C}^*$  gehen durch eine Möbius-Transformation wieder in verallgemeinerte Kreise über.

**Beweis:** Für  $c = 0$  ist die Aussage klar, da  $T$  dann eine lineare Abbildung ist. Für  $c \neq 0$  zerlegen wir die Abbildung wie folgt

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \frac{1}{cz + d}.$$

Da lineare Abbildungen aber kreistreu sind, genügt es zu zeigen, dass die Inversion  $f(z) := 1/z$  kreistreu ist. Hierzu unterziehen wir  $f$  der stereographischen Projektion (die ja nach (3.2) kreistreu ist), d.h. wir untersuchen, welche Abbildung  $F(X)$  der Riemannschen Zahlenkugel in sich der Abbildung  $f$  entspricht.

Nach (3.1) gilt

$$X = P^{-1}(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T.$$

Für das Bild von  $1/z$  folgt genauso

$$\begin{aligned}
 X' &= F(X) = P^{-1}(1/z) \\
 &= \left( \frac{1/z + 1/\bar{z}}{1 + (1/z)(1/\bar{z})}, \frac{1/z - 1/\bar{z}}{i(1 + (1/z)(1/\bar{z}))}, \frac{(1/z)(1/\bar{z}) - 1}{1 + (1/z)(1/\bar{z})} \right)^T \\
 &= \left( \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, -\frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, -\frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T \\
 &= (X_1, -X_2, -X_3)^T
 \end{aligned}$$

$F(X)$  beschreibt also die Drehung der Sphäre um  $180^\circ$  um die  $X_1$ -Achse. Diese Abbildung ist aber offensichtlich kreistreu und damit ist es auch die Inversion, da ja  $f = P \circ F \circ P^{-1}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 z & \xrightarrow{P^{-1}} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow F \\
 1/z & \xleftarrow{P} & X'
 \end{array}$$

## Bemerkungen (3.5)

Es sei wieder  $w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $ad \neq bc$ .

- Verallgemeinerte Kreise durch den Punkt  $-(d/c)$  werden durch die Möbius-Transformation (3.3) in Geraden der  $w$ -Ebene abgebildet.
- Alle Geraden der  $z$ -Ebene werden in verallgemeinerte Kreise der  $w$ -Ebene durch den Punkt  $(a/c)$  abgebildet.
- Kreise, die nicht durch den Punkt  $-(d/c)$  gehen werden in Kreise abgebildet, die nicht durch den Punkt  $(a/c)$  gehen.

### Satz (3.6) (Doppolverhältnis)

Gegeben seien zweimal drei paarweise verschiedene Punkte  $z_1, z_2, z_3$  und  $w_1, w_2, w_3$  in  $\mathbb{C}^*$ .

Dann gibt es genau eine Möbius-Transformation (3.3)  $w = T(z)$  mit  $\forall j = 1, 2, 3 : w_j = T(z_j)$  (Interpolation!).

Diese ist gegeben durch die Dreipunkteformel

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

**Bemerkung (3.7)** Der Ausdruck

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

heißt das **Doppolverhältnis** der Punkte  $z_k, k = 0, \dots, 3$ .

**Beispiel (3.8)** Gesucht ist eine Möbius-Transformation mit der folgenden Abbildungseigenschaft

$$\begin{array}{c|ccc} z_k & 1 & i & 0 \\ \hline w_k & i & -i & 0 \end{array}$$

Nach der Dreipunkteformel ergibt sich

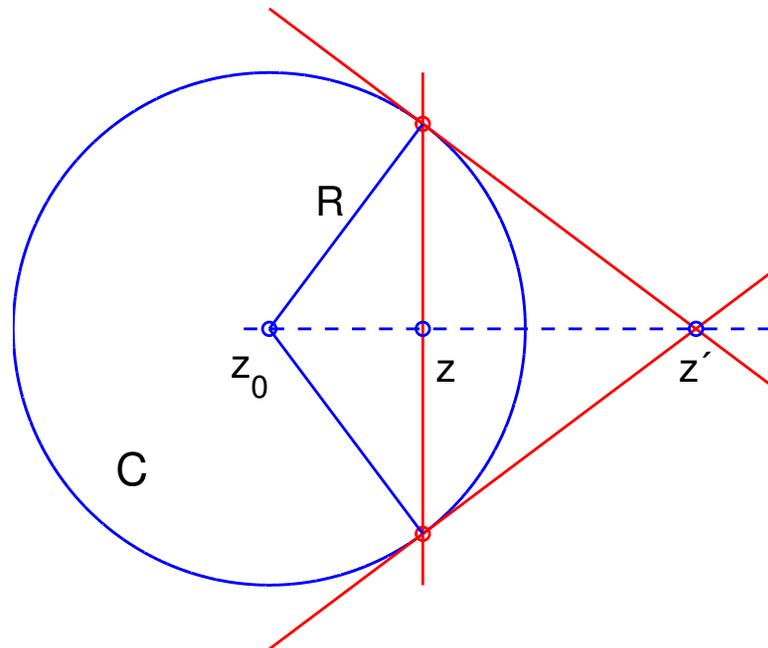
$$\frac{w - i}{w + i} \cdot \frac{0 - i}{0 + i} = \frac{z - 1}{z - i} \cdot \frac{0 - 1}{0 - i}.$$

Die Auflösung dieser Beziehung nach  $w$  liefert dann

$$w = T(z) = \frac{(1 + i)z}{(1 + i)z - 2i}.$$

Man überprüfe die Interpolationsbedingungen!

**Definition (3.9)** Liegen die Punkte  $z$  und  $z'$  wie in der folgenden Abbildung, so sagt man, sie liegen **symmetrisch zum Kreis C**:  $|z - z_0| = R$ .



**Abb 3.2. Symmetrie zum Kreis**

## Bemerkungen (3.10)

- Die Abbildung  $z \rightarrow z'$  heißt auch **Inversion am Kreis** oder **Spiegelung am Kreis**.
- Es ist immer ein Punkt  $z$  mit  $|z - z_0| \leq R$  zu einem Punkt  $z'$  mit  $|z' - z_0| \geq R$  symmetrisch. Gilt  $|z - z_0| = R$ , so ist  $z$  zu sich selbst symmetrisch. Der Punkt  $z = z_0$  ist zu  $z' = \infty$  symmetrisch.
- Analytische Darstellung der Inversion am Kreis:

$$(z - z_0) (\overline{z' - z_0}) = R^2$$

- In Ergänzung sagt man, zwei Punkte  $z$  und  $z'$  liegen **symmetrisch zu einer Geraden**, wenn sie durch Spiegelung an dieser Geraden ineinander übergehen.

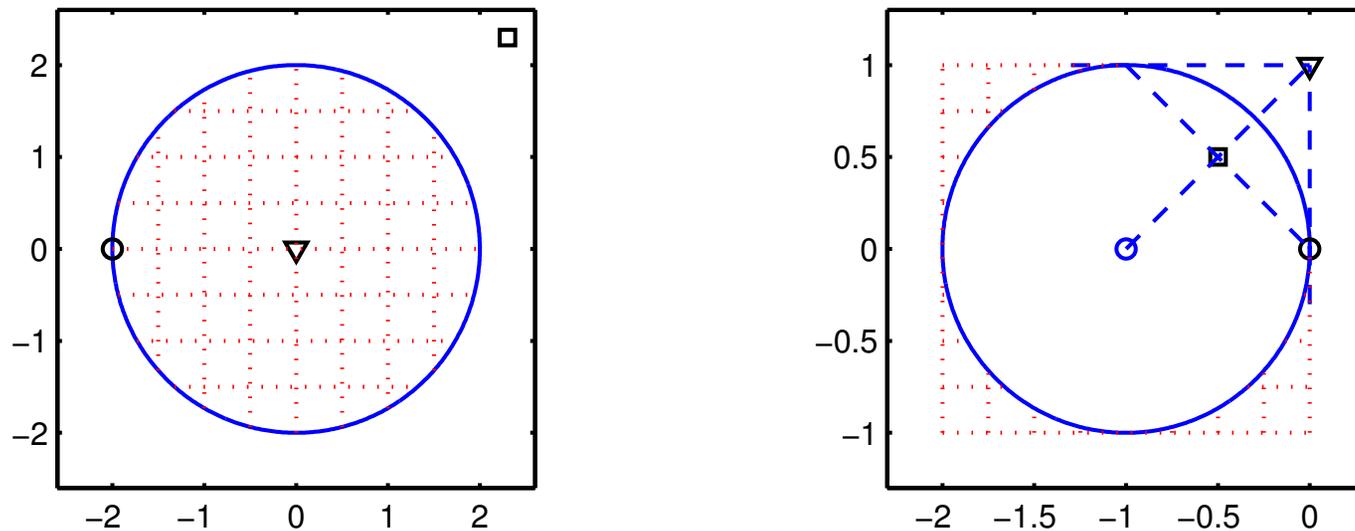
### Satz (3.11)

Möbius-Transformationen erhalten die Symmetrie zu verallgemeinerten Kreisen. Genauer: Ist  $C$  ein verallgemeinerter Kreis in  $\mathbb{C}^*$  und liegen  $z$  und  $z'$  symmetrisch zu  $C$ , so liegen die Bilder von  $z$  und  $z'$  unter einer Möbius-Transformation symmetrisch zum Bild von  $C$ , das ja nach 3.4 ebenfalls ein verallgemeinerter Kreis ist.

### Beispiel (3.12)

Gesucht ist eine Möbius-Transformation  $w = T(z)$ , die den Kreis  $|z| = 2$  in den Kreis  $|w + 1| = 1$  abbildet und für die gilt  $T(-2) = 0$  und  $T(0) = i$ .

**Lösung:**  $z_2 := 0$  und  $z_3 := \infty$  liegen symmetrisch zu  $|z| = 2$ . Daher müssen auch die Bilder  $w_2 = i$  und  $w_3 := T(\infty)$  symmetrisch zum Kreis  $|w + 1| = 1$  liegen. Nach (3.10) gilt also  $(w_2 + 1) \overline{(w_3 + 1)} = 1$  und damit  $w_3 = 0.5(-1 + i)$ .



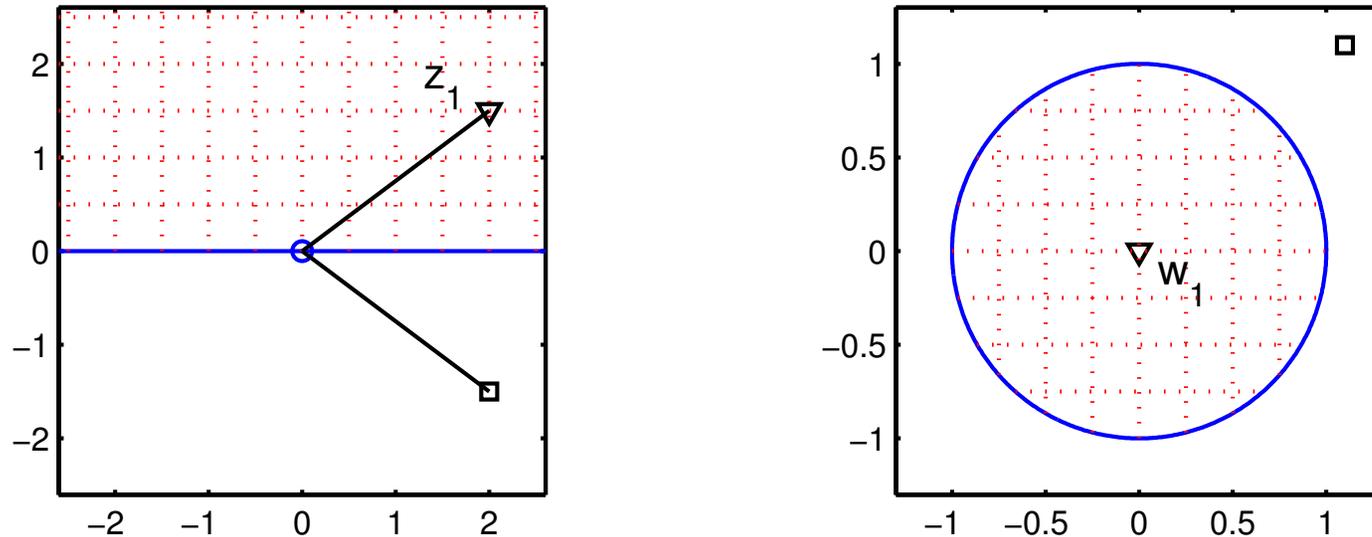
**Abb 3.3. Möbius-Transformation**

Mit der Dreipunkteformel folgt nun

$$\left(\frac{w - 0}{w - i}\right) : \left(\frac{w_3 - 0}{w_3 - i}\right) = \left(\frac{z + 2}{z - 0}\right) : \left(\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0}\right) \Big|_{z_3 \rightarrow \infty}.$$

Auflösung nach  $w$  ergibt  $w = T(z) = -\frac{z + 2}{(1 + i)z + 2i}.$

**Beispiel (3.13)** Gesucht sei eine Möbius-Transformation, die  $\text{Im } z \geq 0$  in  $|w| \leq 1$  abbildet und einen vorgegebenen Punkt  $z_1$  mit  $\text{Im } z_1 > 0$  in  $w_1 = 0$  transformiert.



**Abb 3.4. Möbius-Transformation**

**Lösung:** Aus Symmetriegründen muss  $z_2 := \bar{z}_1$  in  $w_2 = \infty$  abgebildet werden; damit folgt  $w = c \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1}$ ,  $|c| = 1$ .

**Beispiel (3.14)** Für  $b > a > 0$  betrachten wir die folgende Möbius-Transformation

$$w = T(z) = \frac{z + p}{-z + p}, \quad p := \sqrt{ab} \in ]a, b[.$$

Wir werten einige Punkte aus

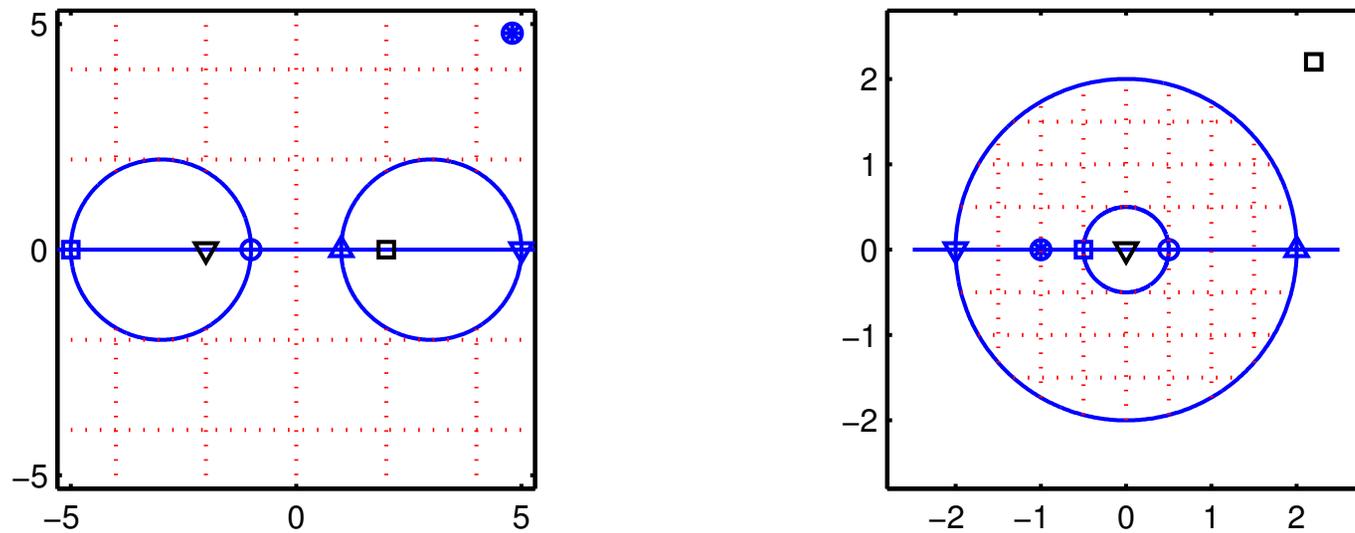
$$z_{1,2} = \pm p \quad \rightarrow \quad w_{1,2} = \infty, 0,$$

$$z_{3,4} = a, b \quad \rightarrow \quad w_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} =: \pm \rho, \quad \rho > 1,$$

$$z_{5,6} = -a, -b \quad \rightarrow \quad w_{5,6} = \pm \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \pm \frac{1}{\rho},$$

$$z_{7,8} = 0, \infty \quad \rightarrow \quad w_{7,8} = 1, -1.$$

Damit wird die  $x$ -Achse auf die  $u$ -Achse abgebildet und symmetrisch zur  $x$ -Achse liegende Punkte werden auf Punkte symmetrisch zur  $u$ -Achse abgebildet. Insbesondere werden Kreise symmetrisch zur  $x$ -Achse auf Kreise symmetrisch zur  $u$ -Achse abgebildet.



**Abb 3.5. Möbius-Transformation**

**Anwendung:** Das elektrostatische Feld im Äußeren von zwei stromdurchflossenen parallelen Leitern wird in das Feld eines Zylinderkondensators abgebildet.