# 5. Konforme Abbildungen

## Satz (5.1) (über konforme Abbildungen)

**a)** Ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ mit $f'(z) \neq 0$, $\forall\, z \in D$, so gelten die folgenden lokalen Eigenschaften bei $z_0 \in D$:

- Der Winkel zwischen zwei sich in $z_0$ schneidenden Kurven bleibt bei der Transformation $w = f(z)$ erhalten. Ebenso der Umlaufsinn.
- $|f'(z_0)|$ ist die für alle von $z_0$ ausgehenden Richtungen gemeinsame Längenverzerrung. Insbesondere bleiben Längenverhältnisse im Kleinen erhalten.

Abbildungen mit diesen beiden Eigenschaften heißen *konforme Abbildungen*.



**b)** Ist $w = f(z)$ eine konforme Abbildung und als Transformation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so ist $f$ auch komplex differenzierbar und es gilt $f'(z) \neq 0$.

**Beweis:** (nur zu a)) Sind $\mathbf{c}$ und $\tilde{\mathbf{c}}$ zwei $C^1$-Kurven in $D$ mit $\mathbf{c}(0) = \tilde{\mathbf{c}}(0) = z_0$, so gilt für den Winkel zwischen den Tangenten an $\mathbf{c}$ und $\tilde{\mathbf{c}}$

$$\gamma = \sphericalangle(\dot{\mathbf{c}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{c}}}(0)) = \arg(\dot{\mathbf{c}}(0)) - \arg(\dot{\tilde{\mathbf{c}}}(0)).$$

Für die Bildkurven $f \circ \mathbf{c}$ und $f \circ \tilde{\mathbf{c}}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma} &= \sphericalangle(f'(z_0)\,\dot{\mathbf{c}}(0), f'(z_0)\,\dot{\tilde{\mathbf{c}}}(0)) \\
&= \arg(f'(z_0)\,\dot{\mathbf{c}}(0)) - \arg(f'(z_0)\,\dot{\tilde{\mathbf{c}}}(0)) \\
&= \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{\mathbf{c}}(0)) - \arg(f'(z_0)) - \arg(\dot{\tilde{\mathbf{c}}}(0)) \\
&= \gamma,
\end{aligned}$$

$$\left\| \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{c})(0) \right\| = \left| f'(z_0)\,\dot{\mathbf{c}}(0) \right| = |f'(z_0)|\,\|\dot{\mathbf{c}}(0)\| \qquad \square$$

**Definition (5.2)** Es sei $w = f(z)$ eine bijektive und konforme Transformation $f : D \to W$ zweier Gebiete $D$ und $W$ in $\mathbb{C}$.

Zu einer vorgegebenen C$^2$–Funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}$ setzen wir $\Psi := \Phi \circ f^{-1}$. $\Psi$ heißt die konforme Transformation von $\Phi$ mittels $f$.

**Anwendung:** Gesucht ist eine Potentialfunktion $\Phi$ (Lösung von $\Delta\Phi = 0$) auf einem physikalischen Bereich $D$. Kennt man nun eine konforme Transformation $f$ des physikalischen Bereichs auf einen Modellbereich $W$ und eine Potentialfunktion $\Psi$ auf $W$, so ist durch $\Phi := \Psi \circ f$ eine gesuchte Potentialfunktion gegeben.



$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "\Phi"'] & W \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, "\Psi"] \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\Phi(z)$: gesuchte Potentialfunktion, $D$: physikalischer Bereich, $W$: Modellbereich, $\Psi(w)$: bekannte Potentialfunktion

**Definition (5.3)** Zu einer C$^1$-Funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}$ heißt

$$\text{grad}\,\Phi(z) := \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

der komplexe Gradient von $\Phi$.

**Satz (5.4)** Unter den obigen Voraussetzungen an $\Phi$, $\Psi$ und $f$ und entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gelten

**a)** $\quad \operatorname{grad} \Phi(z) = \operatorname{grad} \Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}$

**b)** $\quad \Delta\Phi(z) = \Delta\Psi(f(z)) \cdot |f'(z)|^2$

**Beweis:** **zu a):** Aus $\Phi(x,y) = \Psi(u(x,y), v(x,y))$ folgt

$$\Phi_x = \Psi_u u_x + \Psi_v v_x, \qquad \Phi_y = \Psi_u u_y + \Psi_v v_y,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \operatorname{grad} \Phi &= (\Psi_u u_x + \Psi_v v_x) + i\,(\Psi_u u_y + \Psi_v v_y) \\ &= \Psi_u (u_x + i u_y) + \Psi_v (v_x + i v_y) \\ &= \Psi_u (u_x - i v_x) + i\,\Psi_v (u_x - i v_x) \\ &= \operatorname{grad} \Psi(w) \cdot \overline{f'(z)}. \end{aligned}$$



**zu b):** Nochmalige Differentiation liefert

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} &= \Psi_{uu} u_x^2 + 2\,\Psi_{uv} u_x v_x + \Psi_{vv} v_x^2 + \Psi_u u_{xx} + \Psi_v v_{xx} \\ \Phi_{yy} &= \Psi_{uu} u_y^2 + 2\,\Psi_{uv} u_y v_y + \Psi_{vv} v_y^2 + \Psi_u u_{yy} + \Psi_v v_{yy} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Psi_{uu} [u_x^2 + u_y^2] + 2\,\Psi u\, v[u_x v_x + u_y v_y] + \Psi_{vv} [v_x^2 + v_y^2] \\ &\quad + \Psi_u \Delta u + \Psi_v \Delta v. \end{aligned}$$

Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten nun $u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = |f'(z)|^2$, $u_x v_x + u_y v_y = 0$, sowie $\Delta u = \Delta v = 0$.

Damit folgt aus der obigen Gleichung $\Delta\Phi = \Delta\Psi\ |f'(z)|^2$. $\square$

## Anwendung I: RWA für die 2-dim. Laplace-Gleichung

Zu lösen sei das Dirichlet-Randwertproblem

$$\Delta u = 0, \;\; z \in D, \qquad u(z) = u_0(z), \;\; z \in \partial D, \tag{5.5}$$

für ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet $D \subset \mathbb{C}$.

Wir nehmen an, dass sich $\overline{D}$ (einschließlich Rand) bijektiv und stetig auf $\overline{K}_1(0)$ abbilden lässt vermöge einer Transformation $f : \overline{D} \to \overline{K}_1(0)$, die auf $D$ selbst konform ist. Mit $\Psi := u \circ f^{-1}$ geht das physikalische Problem dann über in das Modellproblem

$$\Delta\Psi(w) = 0, \;\; |w| < 1, \qquad \Psi(w) = \Psi_0(w), \;\; |w| = 1. \tag{5.6}$$

Mit der Fourierschen Methode lässt sich die Lösung des Modellproblems explizit angeben (vgl. Vorlesung Diff.gln. II).
In komplexer Schreibweise (Polarkoordinaten) gilt



$$\Psi(r\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\, r^{|k|}\, \mathrm{e}^{i\,k\,\varphi}, \tag{5.7}$$

wobei die $\gamma_k$ die (komplexen) Fourier-Koeffizienten der transformierten Randfunktion $\Psi_0(\mathrm{e}^{i\,\varphi}) := u_0(f^{-1}(\mathrm{e}^{i\,\varphi}))$ sind.

Die Rücktransformation ergibt

$$u(z) = \Psi(f(z)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\, |f(z)|^{|k|}\, \mathrm{e}^{i\,k\,\arg(f(z))}. \tag{5.8}$$

## Anwendung II: Ebene Potentialströmung

Wir betrachten eine stationäre, wirbel- und quellenfreie, ebene Umströmung eines Zylinders (mit $z$-Achse als Symmetrieachse und Querschnitt $K \subset \mathbb{C}$). Bezeichnet $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \setminus K \to \mathbb{R}^2$ das Geschwindigkeitsfeld der Strömung, so gelten

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{u}(x,y) &&= \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} &&= 0, \\
&\text{(b)} \qquad \operatorname{div} \mathbf{u}(x,y) &&= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} &&= 0.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Wir können annehmen, dass $D := \mathbb{R}^2 \setminus K$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^2$ ist. Dann folgt aus (5.9) die Existenz zweier Potentiale, nämlich Bei uns

(a) $\overset{\varnothing}{U} : D \to \mathbb{R}, \quad \nabla U = -\mathbf{u}(x,y),$ Geschwindigkeitspotential, $u = \nabla \varnothing$

(b) $V : D \to \mathbb{R}, \quad \nabla V = (u_2, -u_1)^{\mathsf{T}},$ Stromfunktion. (5.10) $\begin{bmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \nabla \chi$

Die Stromlinien sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = u_1, \quad \dot{y} = u_2$. Damit sind die Stromlinien gegeben durch

$$\overset{\chi}{V}(x,y) = \text{const.} \tag{5.11}$$



*Denn:* $\quad \dfrac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = V_x \dot{x} + V_y \dot{y} = u_2 u_1 - u_1 u_2 = 0.$

Die Stromlinien sind also die Höhenlinien der Stromfunktion $V$.

**Definition (5.12)** Die komplexe Funktion $\underset{f}{\Phi} := \underset{\varnothing + i\chi}{U + i V}$ heißt das komplexe Strömungspotential.

$\Phi$ ist eine auf $D$ holomorphe Funktion, da die Cauchy- Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind

$$U_x - V_y = -u_1 - (-u_1) = 0, \quad U_y + V_x = -u_2 + u_2 = 0.$$

Man kann das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}$ der Strömung auch folgendermaßen aus dem komplexen Strömungspotential zurück erhalten:

$$\mathbf{u} = u_1 + i\, u_2 = -\underset{f(z)}{\underline{\overline{\Phi'(z)}}}, \tag{5.13}$$

*denn*: $\Phi'(z) = U_x + i V_x = -u_1 + i u_2$.

$f'(z) = u_1 - i u_2$

**Idee zur Berechnung von Φ:** Durch konforme Transformation werde $D = \mathbb{C} \setminus K$ in ein einfacheres Gebiet transformiert, für das man das komplexe Strömungspotential kennt.

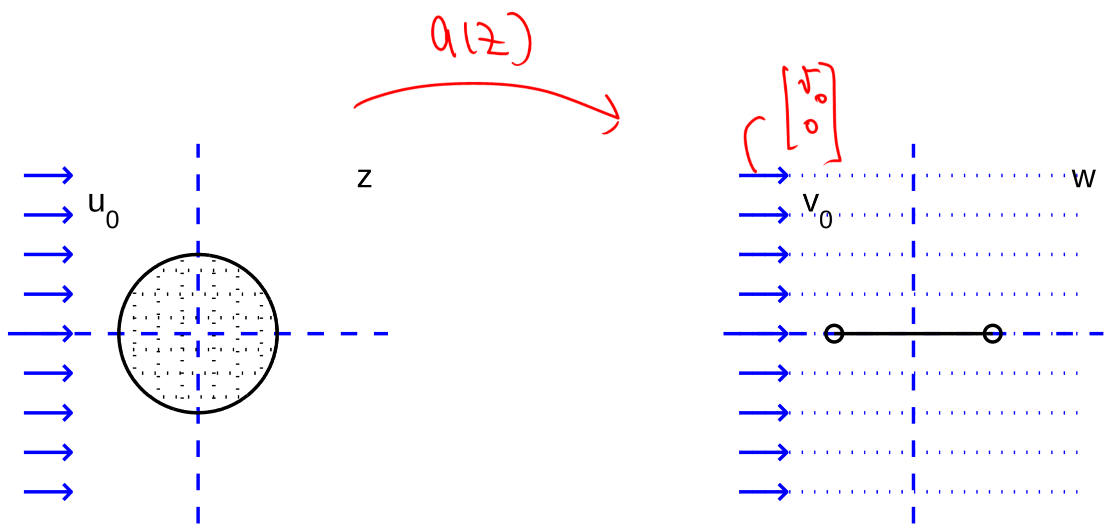
## Beispiel (5.14) Umströmung eines Kreiszylinders.

Wir untersuchen die ebene Umströmung eine Kreiszylinders mit der Querschnittsfläche $\overline{K}_R(0)$, $R > 0$. Das Geschwindigkeitsfeld im Unendlichen sei $\mathbf{u}(\infty) = u_0 > 0$. Als konforme Transformation wählen wir die Joukowski-Funktion, vgl. (2.8)

$$w \;=\; \xi + i\,\eta \;=\; \overset{a(z)}{f(z)} \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z}\right)$$

Hierdurch wird $|z| = R$ auf die (doppelt durchlaufene) Strecke $[-1, 1]$ abgebildet und das Gebiet $D = \mathbb{C}\setminus\overline{K}_R(0)$ wird konform auf $\widetilde{D} = \mathbb{C}\setminus[-1, 1]$ transformiert. Die Strömung wird im Modellbereich also durch das Hindernis nicht beeinflusst!






Wegen (5.10) lautet das komplexe Strömungspotential im Bildraum $\widetilde{\Phi}(w) = -v_0\,w$, $w \in \mathbb{C}$, wobei $v_0 > 0$ die (konstante) Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen ist. Die Rücktransformation ergibt das Strömungspotential des Ausgangsproblems

$$\Phi(z) \;=\; \widetilde{\Phi}(f(z)) \;=\; -\frac{v_0}{2}\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z}\right)$$

$f(z) = \tilde{f}(a(z))$

$\tilde{f}(w) = v_0 w = v_0(\xi + i\eta)$ komplexes Strömungspotential im Bildbereich



$v = \nabla\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_\xi \\ \tilde{\Phi}_\eta \end{bmatrix}$, $\nabla\tilde{\chi} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix}$, also $\tilde{\chi}_\eta = v_0$, d.h. $\tilde{\chi} = v_0\,\eta$ Modellbereich

$\tilde{\phi} = v_0 \xi$

$v(z)$ $\qquad$ $\overline{f'(z)}$

und somit nach (5.13) $\quad \mathbf{u}(z) \;=\; -\,\overline{\Phi'(z)} \;=\; \dfrac{v_0}{2}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{R}{\bar{z}^2}\right).$

Zu Skalierung: Für $z \to \infty$ ergibt sich $\mathbf{u}(\infty) = v_0/(2\,R) = u_0$ und somit $v_0 = 2\,R\,u_0$. Insgesamt erhalten wir also

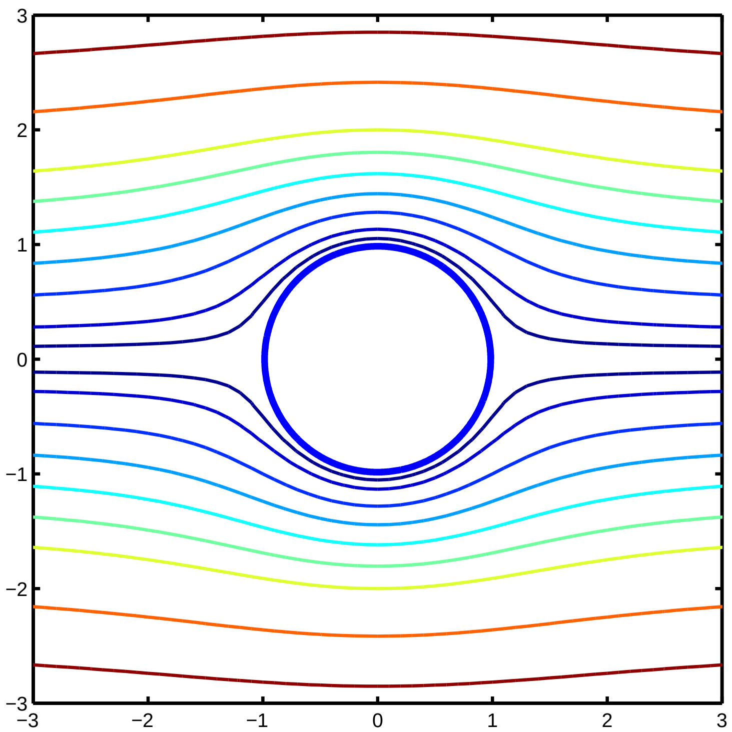
- Kompl. Strömungspotential: $f(z)$ $\quad \Phi(z) \;=\; -\,u_0 \left(z + \dfrac{R^2}{z}\right)$

- Geschwindigkeitspotential: $\phi(z)$ $\quad U(z) \;=\; -\,u_0 \left(x + \dfrac{R^2\,x}{x^2 + y^2}\right)$

- Stromfunktion: $\chi(z)$ $\quad V(z) \;=\; -\,u_0 \left(y - \dfrac{R^2\,y}{x^2 + y^2}\right)$

- Geschwindigkeitsfeld: $v(z)$ $\quad \mathbf{u}(z) \;=\; u_0 \left(1 - \dfrac{R^2}{\bar{z}^2}\right)$





Umströmung eines Kreiszylinders

## Beispiel (5.15) Überströmung einer Mauer.

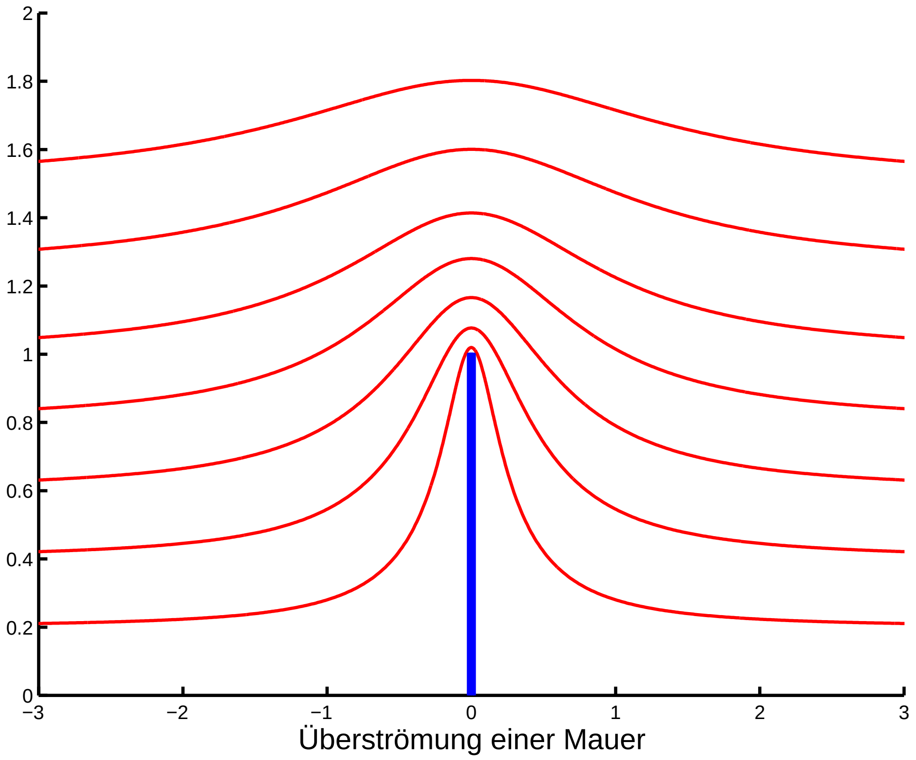
Zur Berechnung der Stromlinien für die nichtturbulente Überströmung einer Mauer lässt sich die folgende konforme Gebietstransformation verwenden $w = f(z) = \sqrt{z^2+1}$. $f$ bildet (bei geeigneter Wahl der Wurzel) die zwischen $z = 0$ und $z = i$ geschlitzte obere Halbebene

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\,(z) > 0, \ z \notin [0,1]\,i\}$$

in die obere Halbebene $\mathrm{Im}\,(w) > 0$ (ohne Hindernis) ab.

Mit Hilfe der Umkehrabbildung $z = f^{-1}(w) = i\,\sqrt{1-w^2}$ lassen sich dann unmittelbar die Urbilder der Stromlinien des Modellproblems $\mathrm{Im}\,(w) = \text{const.}$ zeichnen.





## Anwendung III: Probleme der Elektrostatik

Zu berechnen sei die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(x,y)$ in einem ladungsfreien Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, wobei das Potential $U(x,y)$ mit $\mathbf{E} = -\nabla U$ am Rand des Gebietes $D$ vorgegeben ist. Da $\mathbf{E}$ auf $D$ divergenzfrei ist, folgt insbesondere $\Delta U = 0$, d.h. $U$ ist Lösung eines Dirichlet-Problems

$$\Delta U = 0, \; z = (x,y) \in D, \qquad U(z) = U_0(z), \; z \in \partial D. \quad (5.16)$$

Nach Früherem ist $U$ damit Realteil einer auf $D$ holomorphen Funktion $\Phi(z) = U(z) + i\,V(z)$, dem so genannten komplexen Potential.

Wieder heißt $V$ die Stromfunktion, $U(x,y) = \text{const.}$ beschreibt die Äquipotentiallinien, $V(x,y) = \text{const.}$ die Feldlinien.



Ebenfalls kann man das elektrische Feld wieder direkt aus dem komplexen Potential gewinnen vermöge

$$\mathbf{E} = -\big(U_x + i\,U_y\big) = -\big(U_x - i\,V_x\big) = -\overline{\Phi'(z)}. \qquad (5.17)$$

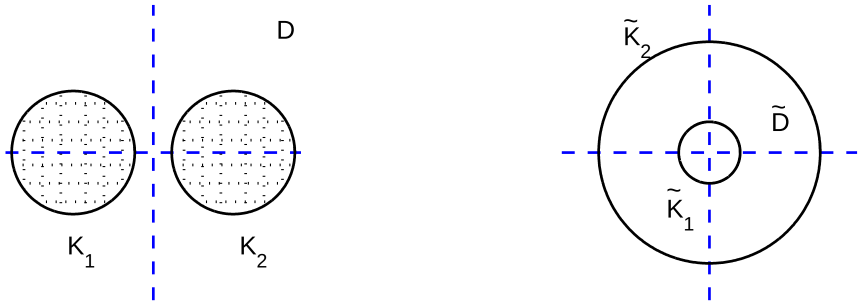
Die Grundidee lässt sich übertragen: Man transformiere das Gebiet $D$ vermöge einer konformen Abbildung (bijektiv) in ein einfacheres Gebiet $\widetilde{D}$ und löse das Modellproblem

$$\Delta \tilde{U}(w) = 0, \; w \in \widetilde{D}, \qquad \tilde{U}(w) = \tilde{U}_0(w), \; w \in \partial \widetilde{D}.$$

Dabei ist $\tilde{U}_0 := U_0 \circ f^{-1}$ die transformierte Randfunktion.

Anschließend transformiere man die Lösung zurück: $U := \tilde{U} \circ f$.

**Beispiel (5.18)** Wir bestimmen die Feldlinien in Außenraum von zwei stromdurchflossenen Leitern mit Querschnitten $K_1$ und $K_2$.




Sind $a$, $b$ mit $0 < a < b$ bzw. $-a$ und $-b$ die Schnittpunkte der Querschnittskreise mit der $x$-Achse, so wird durch

$$w = f(z) = \frac{p+z}{p-z}, \quad p := \sqrt{a\,b},$$

eine Möbius-Transformation beschrieben, die $D$ konform auf den Kreisring $\widetilde{D} := \{w : 1/\rho < |w| < \rho\}$, $\rho := (\sqrt{a}+\sqrt{b})/(\sqrt{b}-\sqrt{a})$, abbildet, vgl. Beispiel (3.12).



Nehmen wir an, dass die Randfunktionen im physikalischen Problem konstant sind

$$U(z) = -U_0, \; z \in K_1, \qquad U(z) = U_0, \; z \in K_2,$$

so erhalten wir das folgende Modellproblem

$$\Delta \widetilde{U} = 0, \quad w \in \widetilde{D},$$
$$\widetilde{U}(w) = -U_0, \; w \in \widetilde{K}_1, \quad \widetilde{U}(w) = U_0, \; w \in \widetilde{K}_2.$$

Aufgrund der Ursprungssymmetrie des Modellproblems kann man annehmen, dass $\widetilde{U} = \widetilde{U}(r)$ nur vom Abstand $r$ zum Ursprung abhängt. Damit erhalten wir eine gewöhnliche Randwertaufgabe

$$\widetilde{U}''(r) + \frac{1}{r}\widetilde{U}'(r) = 0,$$
$$\widetilde{U}(1/\rho) = -U_0, \quad \widetilde{U}(\rho) = U_0.$$

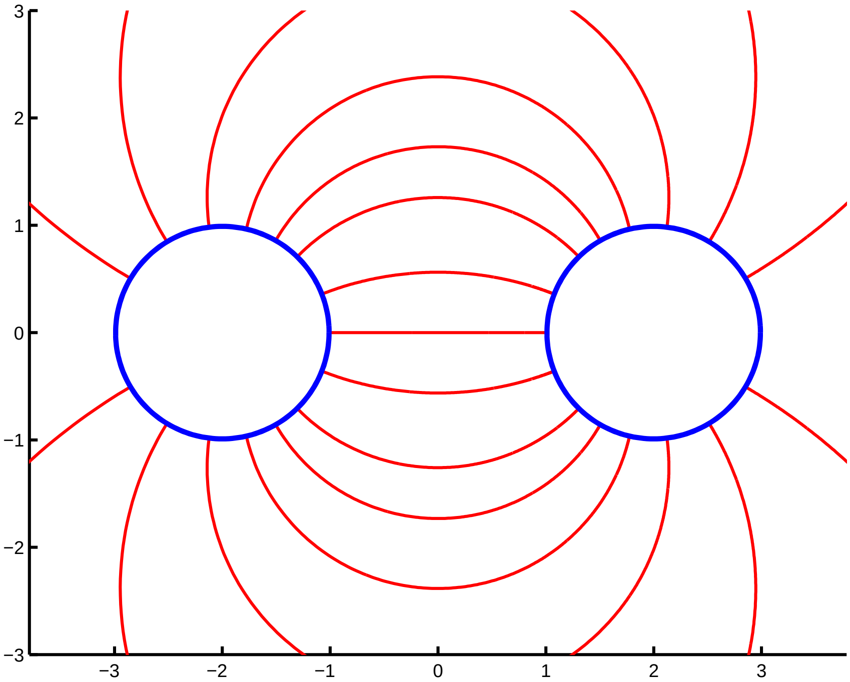
Die Lösung lautet $\widetilde{U}(r) = \dfrac{U_0}{\ln\rho}\ln r, \;\; 1/\rho \le r \le \rho.$

Die Rücktransformation ergibt schließlich

$$U(z) = \frac{U_0}{\ln \rho} \ln |f(z)|, \quad f(z) = \frac{p+z}{p-z},$$
$$p = \sqrt{a\,b}, \quad \rho = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}.$$

Zur Darstellung die Feldlinien genügt es, die Feldlinien des Modellproblems $w = r\,\mathrm{e}^{i\,\phi}$, $1/\rho \le r \le \rho$, vermöge $z = f^{-1}(w)$ zurück zu transformieren.





Feldlinien eines Doppelleiters