Funktionentheorie/Komplexe Funktionen
TUHH
VL 10, 22. Juni 2017

Harmonische Funktionen und komplexe Strömungspotentiale

Michael Hinze

Noch eine Formel zur Integralberechnung mit Hilfe des Residuensatzes

Sei $R(a,b)$ gebrochen rationale Funktion. Dann gilt

$$\int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}\,dz \overset{z=e^{it}}{=} \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{2it}+1}{2e^{it}}, \frac{e^{2it}-1}{2ie^{it}}\right)\frac{ie^{it}}{ie^{it}}\,dt$$

$$\overset{\text{SgL}}{=} \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt$$

<u>Residuensatz</u>: $$\int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}\,dz = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{iz}R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right); z_k\right)$$

z_k isolierte Singularitäten von $R(\ldots)$ im Einheitskreis

<u>Bsp</u>: $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\sin t}\,dt = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{iz}\,\frac{1}{3+\frac{z^2-1}{2iz}}; z_k\right)$$

$$= 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{2}{z^2+6iz-1}; z_k\right)$$

$k=1,\ z_1 = (-3+\sqrt{8})i;$
$z_2 = -(3+\sqrt{8})i;$
nur $|z_1|<1$

$$\vdots$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Holomorphe (analytische) Funktionen und harmonische Funktionen

Wir wissen: f analytisch $\Longrightarrow$ f ∞-oft diffbar

mit Cauchy-Integralsatz.

$f(z) = u(z) + i\,v(z)$, $z = x + iy$

Dann $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ∞-oft diffbar

und $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ CR DGL

Wir erhalten

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y \overset{\text{CRDGL}}{=} (v_y)_x - (v_x)_y$$
$$= v_{yx} - v_{xy} \underset{\text{Schwarz}}{\overset{\text{Satz von}}{=}} 0,$$

d.h. u harmonisch, erfüllt also die Laplace Gleichung.

Analog: $\Delta v = 0$

Merke: f holomorph $\rightarrow$ $\overset{v}{\mathrm{Im}\, f}$, $\overset{u}{\mathrm{Re}\, f}$ harmonisch

Damit

Analytische Funktionen verquickt mit konformen Transformation sind analytisch

Def 1 (Komplexer Gradient)

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $\quad \nabla\phi = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} \stackrel{\wedge}{=} \phi_x + i\,\phi_y$ Komplexer Gradient von ϕ

Sei $z = x+iy$, $\quad f(z) = u(z) + i\,v(z)$

$\phi = \phi(x,y)$, $\quad \chi(u,v) := \phi(f(z)) = \phi \circ f$

Dann gilt

i.) $\nabla\phi(z) = \nabla\chi(f(z))\;\overline{f'(z)}$

ii.) $\Delta\chi(f(z))\,|f'(z)|^2 = \Delta\phi$

Beachte $f'(z) \neq 0$ für konforme Transformationen

Mit ii.)
$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 \text{ in } D \\ \phi &= g \text{ auf } \partial D \end{aligned}$$
kann gelöst werden durch
$$\begin{aligned} \Delta\chi &= 0 \text{ in } \tilde{D} \\ \chi &= \tilde{g} \text{ auf } \partial\tilde{D} \end{aligned} \rightarrow \chi. \quad \phi := \chi \circ f^{-1} \text{ löst}$$
dann Ursprungsproblem.

<u>Nachweis</u> i.)

$\phi(x,y) = \chi(u,v)$

$\phi_x = \chi_u u_x + \chi_v v_x$, $\quad \phi_y = \chi_u u_y + \chi_v v_y$

$$\nabla\phi = \phi_x + i\,\phi_y = \chi_u(u_x + i\underbrace{u_y}_{-v_x}) + \chi_v(v_x + i\underbrace{v_y}_{u_x})$$

$$= (\chi_u + i\chi_v)\underbrace{(u_x - i v_x)}_{\overline{f'(z)}} = \nabla\chi\;\overline{f'(z)}$$

ii.) analog mit 2ten Ableitungen, siehe Skript Oben

Folgerung: ϕ harmonisch, $\chi := \phi \circ f$, f analytisch mit $f'(z) \neq 0$ (also f konform). Dann χ harmonisch.

Das komplexe Strömungspotential zur Beschreibung ebener quell- und wirbelfreier Strömungen.

Wir wissen: $f(z) = \phi(z) + i\,\chi(z)$, $z = x + iy$

in $D \subseteq \mathbb{C}$ analytisch $\Longrightarrow$ ϕ, χ ∞-oft diffbar und harmonisch (Umkehrung gilt i.d.R. nicht ($f(z) = \bar{z}$))

Sei D einfach zshgd und ϕ sei harmonisch in D, d.h. $\Delta\phi = 0$. Setze $w := \begin{bmatrix} -\phi_y \\ \phi_x \end{bmatrix}$ $\Longrightarrow$ $w_{2x} = \phi_{xx} \overset{\Delta\phi = 0}{=} -\phi_{yy} = w_{1y}$

Damit erfüllt w die Integrabilitätsbedingung $J_w = J_w^t$ und 2ter Hauptsatz der Potentialtheorie sagt: $\boxed{\text{Es gibt } \chi \text{ mit } w = \nabla\chi}$,

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \chi_x = -\phi_y \\ w_2 &= \chi_y = \phi_x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \underbrace{\chi_x = -\phi_y, \quad \chi_y = \phi_x}_{\text{CRDGL}},$$

also $f(z) := \phi(z) + i\,\chi(z)$ holomorph (analytisch)

<u>Merke</u>: $\phi : D \to \mathbb{R}$ harmonisch, D einfach zshgd und $\chi : D \to \mathbb{R}$ mit $\nabla \chi = \begin{bmatrix} -\phi_y \\ \phi_x \end{bmatrix}$ (so ein χ gibt es, siehe oben). Dann

$f(z) = \phi(z) + i\chi(z)$ analytisch

<u>Bsp</u>: $\phi(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \Delta\phi = 2-2 = 0$. $\nabla\chi = \begin{bmatrix} 2y \\ 2x \end{bmatrix}$,

also $\chi_x = 2y$, $\chi_y = 2x \Rightarrow \chi = 2xy + c(y)$
$\chi = 2xy + d(x)$ $\Big\} \to c(y) = d(x) \equiv \text{const}$

Setze const $= 0$: $f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy = z^2$

Sei $v = v(x,y) = \begin{bmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{bmatrix}$ ebene, quell- und wirbelfreie Strömung,

d.h. $\operatorname{div} v = v_{1x} + v_{2y} = 0$ und $\operatorname{rot} v = 0 = v_{1y} - v_{2x}$

$\operatorname{rot} v = 0 \xRightarrow[\text{Potentialtheorie}]{\text{2ter Hauptsatz}} \exists\, \phi : v = \nabla\phi$, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$v_1 = \phi_x$
$v_2 = \phi_y$

$\operatorname{div} v = 0 \Rightarrow \underbrace{\operatorname{div} \nabla \phi}_{\Delta\phi} = 0$, d.h. ϕ harmonisch

Setze $\nabla\chi = \begin{bmatrix} -\phi_y \\ \phi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$. Dann wie oben:

$f(z) := \phi(z) + i\chi(z)$
analytisch

Def.: $f(z) = \phi(z) + i\,\chi(z)$ heißt komplexes Strömungspotential

χ heißt Stromfunktion, $\chi \equiv$ const sind Linien gleicher Strömungsgeschwindigkeit, denn χ ist konstant auf Stromlinien $\dot{x} = v_1$, $\dot{y} = v_2$

$$0 = \dot{\chi} = \chi_x \dot{x} + \chi_y \dot{y} = -v_2 v_1 + v_1 v_2 = 0$$

Damit ist Strömung mit Geschwindigkeit v vollständig durch ϕ und χ beschrieben.