Funktionentheorie/Komplexe Funktionen
TUHH
VL 9, 15. Juni 2017

Folgerungen und Anwendungen des Residuensatz

Michael Hinze

Laurent-Entwicklungen für unsere Beispiele

i) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$ Singularität

$$= \frac{1}{z} \sin z = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n},$$

d.h. $a_n = 0 \; \forall_{n<0}$, also $z_0 = 0$ hebbare Singularität.

ii) $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit q Polynom, z.Bsp $p(z) = 1$, $q(z) = 1+z^2$, $z_0 = i$

Dann $$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z-i}\,\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z+i}\right)^{(n)}\Big|_{z=i} (z-i)^n \frac{1}{n!}}_{\text{Taylor für } \frac{1}{z+i} \text{ bei } z_0 = i}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{2i} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} (z-i)^n$$

für $|z-i| < 2$

d.h. $z_0 = i$ (und $z_0 = -i$) Pol erster Ordnung!

iii) $$e^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} (-1)^{-n} (z-1)^{n}, \quad \text{d.h.}$$

$a_n \neq 0 \quad \forall_{n<0}$, d.h. $z_0 = 1$ wesentliche Singularität

Es gilt der

Satz von Riemann: z_0 isolierte Singularität von f und f in $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ analytisch und beschränkt. Dann z_0 hebbar.

Denn $$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n \qquad \text{Laurent Entwicklung}$$

mit $$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(y)}{(y-z_0)^{n+1}}\, dy \qquad \gamma(t) = z_0 + r e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{r^{n+1} e^{i(n+1)t}}\, i r e^{it}\, dt$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\max_{x \in \partial K_r(z_0)} |f(x)|}_{\leq M \text{ (weil } f \text{ beschränkt)}} \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r \to 0} 0 \quad \forall_{n<0}$$

d.h. $a_n = 0 \quad \forall_{n<0}$, also z_0 hebbar

Satz von Casorati-Weierstraß: z_0 wesentliche Singularität von f. Dann kommen die Werte von f in jeder Umgebung von z_0 jeder komplexen Zahl beliebig nahe!

Denn falls $w \in \mathbb{C}$ ex. mit $|f(z) - w| \geq \varepsilon > 0 \ \forall_{z \in K_r(z_0) \setminus \{z_0\}}$, so gilt:

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w} \quad \text{in } K_r(z_0) \setminus \{z_0\} \text{ analytisch}$$

und $$|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall_{z \in K_r(z_0) \setminus \{z_0\}}$$

$\xrightarrow[\text{Riemann}]{\text{Satz von}}$ g analytisch in $K_r(z_0)$.

Dann entweder $g(z) \neq 0 \ \forall_z$ oder g besitzt isolierte Nullstellen endlicher Ordnung.

i) $g(z) \neq 0 \ \forall_z \Rightarrow \frac{1}{g(z)} = f(z) - w$ analytisch in $K_r(z_0)$

$\rightarrow f$ analytisch in $K_r(z_0)$ $\lightning$ z_0 wesentl. Sing von f.

ii) $g(z_0) = 0$, $g(z) = (z - z_0)^m g_1(z)$ mit g_1 analytisch in $K_r(z_0)$. Damit

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} = w + \sum_{n=-m}^{\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n,$$

wobei $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

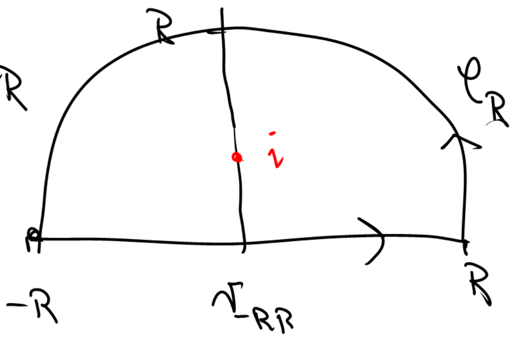
D.h. Laurent-Entwicklung von f hat nur endlich viele Koeffizienten mit negativem Index $\lightning$ zu z_0 wesentlich!

Residuensatz zur Berechnung uneigentlicher reeller Integrale

<u>Vorbereitung</u>: Berechnung von komplexen Integralen mit Residuen

i) $$\int_{K_r(0)} \frac{\cos z}{\sin z}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{\sin z}; 0\right) = 2\pi i \frac{\cos(0)}{\sin'(0)} = 2\pi i$$

$H_R = \gamma_{-RR} \cup \mathcal{C}_R$



ii) $$\int_{H_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}; i\right) = \frac{2\pi i}{2z|_{z=i}} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$$

<u>Bsp</u> $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\, dx .$$

Wir wissen: $$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{\gamma_{-RR}} \frac{1}{1+z^2}\, dz,$$ weil $\gamma_{-RR}(t) = t$ für $\in [-R, R]$

Wir wissen:

$$\pi = \int_{H_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{\mathcal{C}_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz$$

Wir wissen:

$$\left|\int_{\mathcal{C}_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^2 e^{2it}}\, iRe^{it}\, dt\right| \le R \int_0^{\pi} \frac{1}{|1+R^2 e^{2it}|}\, dt$$

$$\leq \pi \frac{R}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

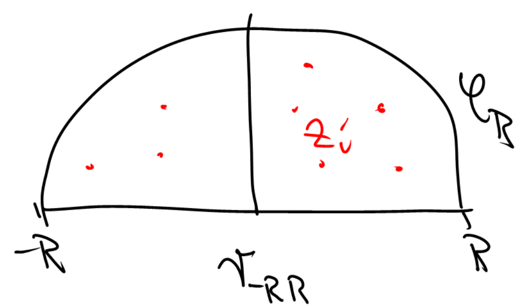
$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}; z=i\right) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

Mit den gleichen Argumenten zeigen wir

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{mit} \quad q(z_i) = 0 \quad i = 1,\dots,m \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z_i > 0$$

p, q Polynome mit reellen Koeffizienten und

$$\deg q \geq \deg p + 2$$



Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}; z_i\right),$$

denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \overset{(*)}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{-RR}} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz + \int_{\varphi_R} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{H_R} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}; z_i\right).$$

(*) gilt wegen $\lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_R} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = 0$. Dies folgt aus

$$\left| \int_{\varphi_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{p(Re^{it})}{q(Re^{it})} iRe^{it} dt \right| \leq \pi R \max_{x \in \varphi_R} \left| \frac{p(x)}{q(x)} \right|$$

$$\leq C R \frac{R^l}{R^{l+2}} = C \frac{1}{R} \xrightarrow{R \to \infty} 0 \qquad \deg p = l, \ \deg q \geq l+2$$

$\square$

Ferner gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}\left(e^{i\omega z} \frac{p(z)}{q(z)}; z_i\right)$$

wobei p, q Polynome mit reellen Koeffizienten, $\operatorname{Im} z_i > 0$ (s.o.) und $\deg q \geq \deg p + 1$. Nachweis ähnlich wie oben, siehe Barwolff

Bsp

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \frac{x}{x^4+1} dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{x}{x^4+1} dx \right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\left(e^{iz} \frac{z}{z^4+1}; \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) + \mathrm{Res}\left(e^{iz} \frac{z}{z^4+1}; \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right) \right\} \right)$$

$$\doteq \pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}$$

---

2) harmonische Funktionen