Funktionentheorie/Komplexe Funktionen
TUHH
VL 6, 11. Mai 2017

Cauchy Integralformel

Michael Hinze

Folgerungen aus dem Cauchy Integralsatz

<u>Ziel</u>: Wir zeigen, dass $\underbrace{\text{holomorphe Funktionen}}_{1\times \text{ komplex diffbar!}}$ ∞-oft diffbar sind!

Hilfsmittel: Cauchy-Integralformel $\quad f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}\,dz$

Zum Nachweis dieser Formel benötigen wir einige Zwischenschritte

1.) Sei $f: \mathbb{C} \supset G \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch ($\equiv$ holomorph), G sei <u>einfach</u> zshgd und φ_1 und φ_2 2 verschiedene Wege in G von A nach B. Dann

$$\int_{\varphi_1} f(z)\,dz = \int_{\varphi_2} f(z)\,dz,$$

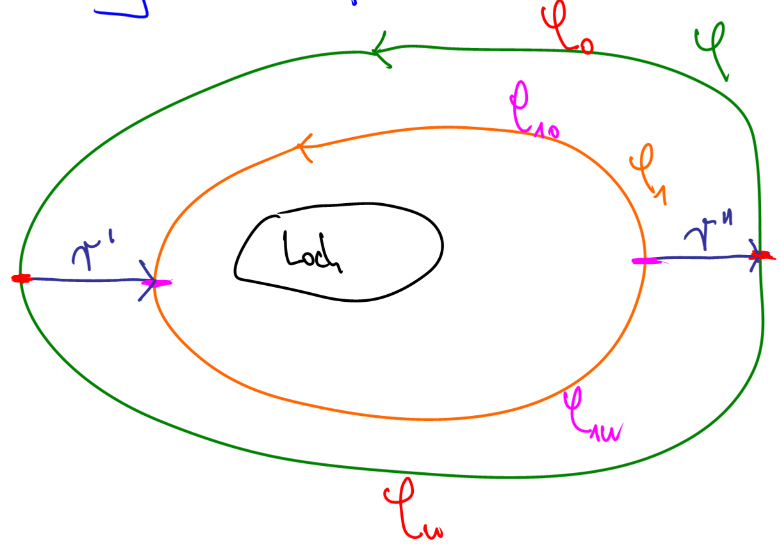
denn $\quad 0 = \int_{\varphi_1 \cup \varphi_2^*} f(z)\,dz = \int_{\varphi_1} f(z)\,dz - \int_{\varphi_2} f(z)\,dz$.

D.h. Integration holomorpher Funktionen ist wegunabhängig

ii) Sei $f : \mathbb{C} \supseteq G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und φ, φ_1 seien geschlossene Wege in G, welche dieselbe Ausnahmemenge ($\hat{=}$ Löcher in G) umschließen und in gleicher Richtung durchlaufen werden.

Dann gilt

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = \int_{\varphi_1} f(z)\,dz$$



Nachweis: Sei

$$\varphi = \underline{\varphi_o} \cup \underline{\varphi_u}$$

$$\varphi_1 = \underline{\varphi_{1o}} \cup \underline{\varphi_{1u}}$$

f holomorph in G. Also

$$0 = \int_{\underbrace{\varphi_o \cup \gamma' \cup \varphi_{1o}^* \cup \gamma''}_{=:\Gamma}} f(z)\,dz \quad \text{und} \quad 0 = \int_{\underbrace{\varphi_u \cup \gamma''^* \cup \varphi_{1u}^* \cup \gamma'^*}_{=:\Gamma'}} f(z)\,dz$$

Damit

$$0 = \int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{\Gamma'} f(z)\,dz = \int_{\Gamma \cup \Gamma'} f(z)\,dz$$

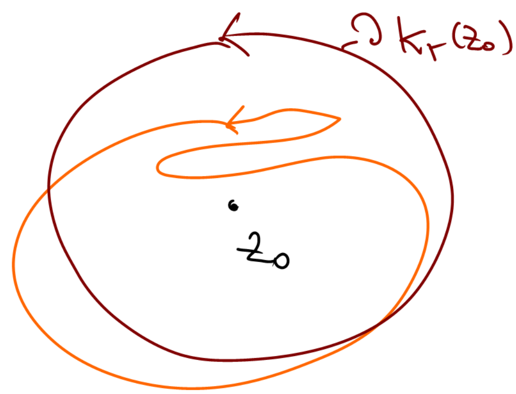
$$= \int_{\varphi_{1o}^* \cup \varphi_{1u}^* \cup \varphi_o \cup \varphi_u} f(z)\,dz = \int_{\varphi} f(z)\,dz - \int_{\varphi_1} f(z)\,dz .$$

Cauchy Integralformel

Sei $f: \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ analytisch, G Gebiet, $B \subset G$ wird von positiv orientierter Kurve φ umschlossen und berandet. $z_0 \in B$ innerer Punkt. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \qquad\qquad f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}\, dz$$

<u>Nachweis</u>: $\frac{f(z)}{z-z_0}$ ist analytisch in $G \setminus \{z_0\}$ (Loch $\hat{=}\ z_0$)



Damit

$$\int_\varphi \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

$\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}}\, i re^{it}\, dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} \underbrace{f(z_0 + re^{it})} dt \quad \text{mit } r > 0 \text{ beliebig mit } K_r(z_0) \subseteq B$$

$$\to f(z_0) \quad (r \to 0)$$

$$= 2\pi i\, f(z_0). \quad \text{Also } \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = f(z_0) \qquad \blacksquare$$

Damit erhalten wir für

$$f(s+h) - f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-(s+h)} - \frac{f(z)}{z-s}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)(z-s) - f(z)(z-(s+h))}{(z-(s+h))(z-s)}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\,h}{(z-(s+h))(z-s)}\,dz \quad . \qquad \text{Also}$$

$$\underbrace{\frac{f(s+h)-f(s)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0}\ f'(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-(s+h))(z-s)}\,dz \xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-s)^2}\,dz$$

$\overset{\text{analog}}{\Longrightarrow}$ f' diffbar mit $f''(s) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-s)^3}\,dz$

Folgerung:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

d.h. f holomorph, dann f ∞-oft diffbar!

Bew.: mit Induktion

IA: $n=0$ $\quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

IV: $\quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

IS: $\quad f^{(n+1)}(z_0) = \frac{d}{dz_0} f^{(n)}(z_0) = \frac{d}{dz_0}\left(\frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right)$

$$\vdots$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}\,dz$$

Folgerungen aus dieser Formel:

i.) f holomorph in G. Wird z_0 von $\mathcal{C}$ umlaufen, so ist $f(z_0)$ vollständig durch die Werte von f auf $\mathcal{C}$ bestimmt.

ii) $\tilde{f}$ entstehe aus f durch Abänderung im Innern des von $\mathcal{C}$ umrandeten Gebiets und es gelte $\tilde{f} = f$ auf $\mathcal{C}$.
Dann kann $\tilde{f}$ nicht holomorph sein!

iii) f holomorph in G. Dann erfüllt f die Mittelwert-Eigenschaft.

$$f(z_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt}_{\text{Mittelwert von } f \text{ auf } \partial K_r(z_0)} \qquad \text{(siehe oben)}$$

iv.) Maximum Prinzip: Sei f holomorph in G. Ferner gebe es $z_0 \in G$ mit

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in G$$

$$\longrightarrow \quad f \text{ konstant in } G$$

<u>Bew Idee</u>: $M := |f(z_0)| \underset{\text{MW-Eigenschaft}}{=} \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt\right|$

IH: f nicht konstant auf $\overline{K_r(z_0)}$ und $|f(z)| \le |f(z_0)| = M \quad \forall_{z \in G}$

Dann gilt

$$M \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi-\varepsilon} |f(z_0 + re^{it})|\, dt + \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + re^{it})|}_{\le M}\, dt \right]$$

$$< \frac{2\pi - \varepsilon}{2\pi} M + \frac{2\pi - (2\pi - \varepsilon)}{2\pi} M = M \qquad ↯$$