Funktionentheorie/Komplexe Funktionen
TUHH
VL 5, 4. Mai 2017

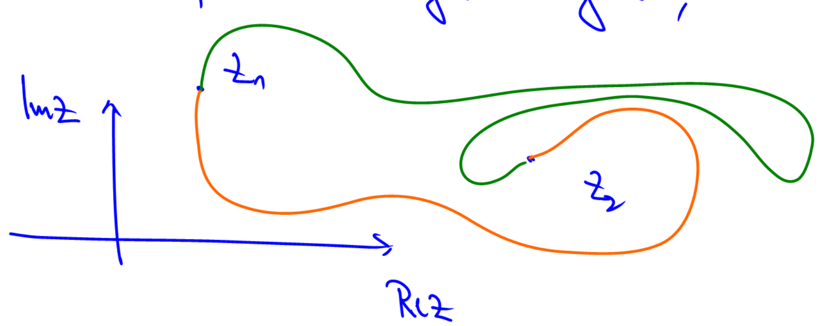
Integration komplexer Funktionen

Michael Hinze

Sei $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetige Funktion (Kurve), d.h. es gibt eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ mit $g|_{[t_i, t_{i+1}]}$ stetig für jedes $i = 0, \dots, m-1$

Damit
$$\int_a^b g(t)\, dt := \int_a^b \operatorname{Re} g(t)\, dt + i \int_a^b \operatorname{Im} g(t)\, dt$$

Integration in $\mathbb{C}$ von z_1 nach z_2 ist auf vielen Wegen möglich;



Ziel: Erkläre Kurvenintegral für komplexe Funktionen

Def: $f : \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ stetig, G Gebiet und C sei ein Weg von A nach B, d.h. $C = \{ z \in \mathbb{C} ;\ z = \gamma(t),\ t \in [a,b]$ mit $\gamma(a) = A$ und $\gamma(b) = B$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ Kurve$\}$

Dann $$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_0^b f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt \in \mathbb{C}$$

Kurvenintegral von f entlang γ. Dabei sei γ stetig und stückweise differenzierbar.

<u>Bsp</u> i.) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + r\,e^{it}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ fg. Dann

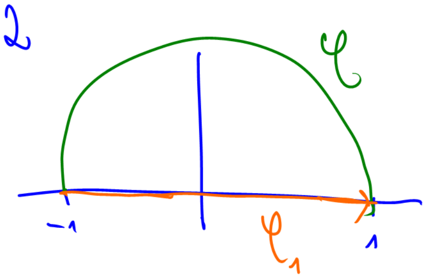
$\dot\gamma(t) = r\,i\,e^{it}$. Sei $f(z) := \frac{1}{z-z_0}$ $D = \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ $C = \text{Spur}(\gamma)$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\,e^{it}}\, r\,i\,e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$ unabhängig von r!

ii) $f(z) = |z|$, $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = e^{i(\pi-t)}$, $\dot\gamma(t) = -i\,e^{i(\pi-t)}$

$f(\gamma(t)) = |e^{i(\pi-t)}| = 1$ $\qquad C = \text{Spur}\,\gamma$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{\pi} -i\,e^{i(\pi-t)}\,dt = \gamma(\pi) - \gamma(0) = 2$$



Wähle anderen Weg $C_1 = \text{Spur}(\gamma_1)$

$\gamma(t) := t$, $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{C}$

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{-1}^{1} |t|\,dt = 1 \neq 2 = \int_C f(z)\,dz$$

d.h. Kurvenintegral i.d.R. <u>nicht</u> wegunabhängig.

Rechenregeln für Kurvenintegrale

i.) $\int_{\mathcal{C}} a\, f(z) + b\, g(z)\, dz = a \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz + b \int_{\mathcal{C}} g(z)\, dz$

ii.) $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{C}_i \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathcal{C}_i} f(z)\, dz$

iii.) $\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = - \int_{\mathcal{C}^*} f(z)\, dz$, wobei $\mathcal{C}^*$ entgegengesetzte Durchlaufrichtung von $\mathcal{C}$ besitzt, jedoch die gleiche Spur

iv.) $\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz \right| \le \underbrace{\text{Länge}(\gamma)}_{\int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt} \max_{z \in \mathcal{C}} |f(z)|$, wobei $\mathcal{C} = \text{Spur}(\gamma)$ mit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

zu iv.) $\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz \right| \le \int_a^b | f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t) |\, dt \le \max_{z \in \mathcal{C}} |f(z)| \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$

<u>**Def.:**</u> $f : \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ stetig. $F : \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion zu f, falls F holomorph ist auf G und

$$F'(z) = f(z) \qquad \forall_{z \in G}$$

erfüllt ist.

<u>Folgerung 1</u> $f: \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ besitze Stammfunktion F. Dann

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = F(B) - F(A), \quad \text{wobei } \gamma = \operatorname{Spur}(\gamma) \text{ mit } \gamma(a) = A$$

und $\gamma(b) = B$, d.h. Kurvenintegral von f ist <u>wegunabhängig</u> !

<u>Nachweis</u> :

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt \overset{F' = f}{=} \int_a^b F'(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \left[F(\gamma(t))\right]' dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(B) - F(A)$$

Damit haben wir 2 Möglichkeiten, $\int_A^B f(z)\, dz$ zu berechnen, falls f Stammfunktion F besitzt.

i) über Weg

ii) mit Stammfunktion

i) $$\int_{a-ib}^{a+ib} \underbrace{\frac{1}{z^2}}_{f(z)}\, dz \;\underset{\substack{-b \le t \le b \\ \dot{\gamma}(t) = i}}{\overset{\gamma(t) = a+it}{=}}\; \int_{-b}^{b} \frac{i}{(a+it)^2}\, dt = \frac{2ib}{a^2+b^2}$$

ii) $$F(z) = -\frac{1}{z}\,; \quad \int_{a-ib}^{a+ib} f(z)\, dz = F(a+ib) - F(a-ib) = \frac{2ib}{a^2+b^2}$$

Kandidat für Stammfunktion von f: $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$

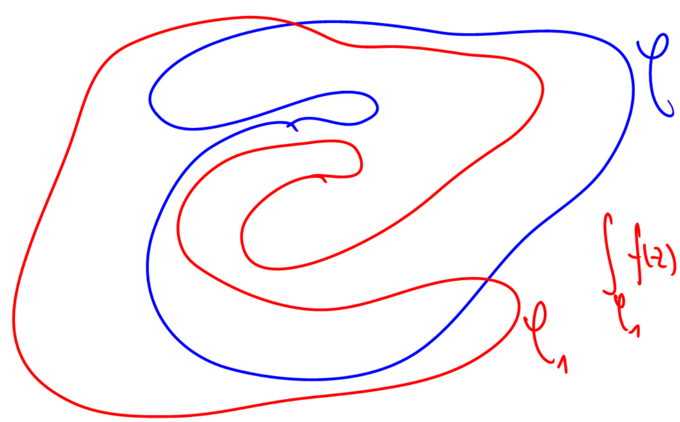
Definition nur sinnvoll, falls Integration von z_0 nach z wegunabhängig

2 →

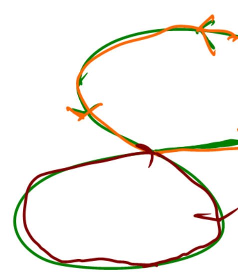
Cauchy-Integralsatz

Sei $f: \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ holomorph, G sei einfach zusammenhängend, $\varphi \subset G$ geschlossene, doppelpunktfreie Kurve. Dann gilt

$$\int_\varphi f(z)\,dz = 0$$



Endlich viele Doppelpunkte sind möglich.



2

$$\varphi = \varphi_o \cup \varphi_u$$

$$\int_\varphi f(z)\,dz = \int_{\varphi_o} f(z)\,dz + \int_{\varphi_u} f(z)\,dz = 0$$

Nachweis Cauchy Integralsatz (mit Satz von Stokes bzw Satz von Green)

Satz von Green: $\omega = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ VF und γ umschließe $G \subset \mathbb{R}^2$ $(\gamma = \partial G)$. Dann $\int_\gamma \omega \cdot dx = \int_G \operatorname{rot} \omega \, dx = \int_G \beta_{x_1} - \alpha_{x_2} \, d(x_1, x_2)$

z. zeigen: $\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt$

$u = u(x,y)$
$v = v(x,y)$

Schreibe $f = u + iv$, $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$. Damit gilt

$$\int_a^b f(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt = \int_a^b u\dot x - v\dot y + i(u\dot y + v\dot x)\, dt \overset{!}{=} 0$$

<u>Zeige</u>: $\mathrm{Re} = 0$; $\int_a^b u\dot x - v\dot y \, dt \overset{!}{=} 0$; setze $\omega = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}u\\ -v\end{bmatrix}$

$$\Vert \text{ Green}$$

$$\int_G -v_x - u_y \, d(x,y) \underset{v_x = -u_y}{\overset{\text{CR-DGLen}}{=}} 0$$

$\mathrm{Im} = 0$; $\int_a^b u\dot y + v\dot x \, dt \overset{!}{=} 0$

$$\Vert \text{ Green}$$

$$\int_G u_x - v_y \, d(x,y) \underset{u_x = v_y}{\overset{\text{CR-DGLe}}{=}} 0.$$