Funktionentheorie/Komplexe Funktionen
TUHH
VL 3, 20. April 2017

Möbius Transformationen

Michael Hinze

Möbius-Transformationen

$\mathbb{C} \ni z \longmapsto T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ und $ad-bc \neq 0$

heißt Möbius Transformation (gebrochen-rationale Funktion, falls $c \neq 0$)

$c=0$: lineare Transformation

Erweiterung der komplexen Zahlenebene um "∞": $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

∞ heißt unendlich ferner Punkt.

Sei $R(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ rationale Funktion mit p,q Polynome

Ist $p(z^*) \neq 0$ und $q(z^*) = 0$, so setze $R(z^*) := \infty$

Rechenregeln:

$$a + \infty := \infty$$
$$a \cdot \infty := \infty \quad \forall a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$
$$a/\infty := 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Rechenregeln von $\mathbb{C}$ gelten auch auf $\mathbb{C}^*$

Konvergenz: $\mathbb{C} \ni z_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty :\Longleftrightarrow \dfrac{1}{z_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Damit ist $\mathbb{C}^*$ folgenkompakt, d.h. jede Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}^*$ besitzt eine konvergente Teilfolge; $\mathbb{C}^*$ ist Ein-Punkt Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$.

Eigenschaften der Möbius Transformationen

i.) $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \dfrac{b - \frac{ad}{c}}{0} := \infty$, weil $bc - ad \neq 0$

i.)' $T(\infty) = \dfrac{a}{c}$

ii) Jeder Möbius Transformation entspricht eine invertierbare Matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ weil n.V. $ab - bc \neq 0$

iii) Hintereinanderausführung von Möbius Transformation

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad \underset{S}{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}} \underset{T}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} =$$

$$(S \circ T)(z) = \frac{(\alpha a + \beta c) z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c) z + \gamma b + \delta d}$$

iv.) $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ bijektiv, wobei $T \hat{=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

Struktur der Möbius Transformation: $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c} \dfrac{1}{cz+d}$

Komposition von
i.) $z \mapsto z + \beta$ Translation
ii) $z \mapsto \alpha z$ Dreh-Streckung
iii) $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ Inversion

Fixpunkte der Möbius Transformation: $z_0 \overset{!}{=} T(z_0)$

$$c=0: \quad T(z_0) = \frac{az_0+b}{d} \overset{!}{=} z_0 \implies z_0 = \frac{b}{d-a} \quad d \neq a$$

$$z_0 = \infty \quad d = a$$

$$c \neq 0: \quad T(z_0) = z_0 \quad \text{gdw} \quad c\,z_0^2 + (d-a)z_0 - b = 0$$

Zsg: $T \neq id$. Dann hat T genau einen oder genau zwei Fixpunkte.

Damit ergibt sich

Satz: Eine Möbius Transformation ist durch die Vorgabe der Bilder 3er verschiedener Punkte eindeutig festgelegt, d.h.

$$T_1(z_i) = T_2(z_i) \quad i = 1,2,3, \quad z_i \neq z_j \quad i,j = 1,2,3 \quad i \neq j$$

$$\longrightarrow \quad T_1 = T_2$$

Nachweis: $\exists$: $T_1 \neq T_2$. Setze $S := T_2^{-1} \circ T_1$ Möbius Transf.

Dann $S(z_i) = z_i \quad i = 1,2,3$, d.h. S hätte 3 Fixpunkte, muß also die Identität sein. $\lightning$ zu $T_1 \neq T_2$

Ziel: Bestimme Möbius Transformation M, die $M(z_i) = w_i \quad i = 1,2,3$ bei Vorgabe von z_1, z_2, z_3 und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ erfüllt.

Konstruktion mit Hilfe des sogenannten Doppelverhältnis

$T(z) := DV(z; z_1, z_2, z_3) := \dfrac{z - z_1}{z - z_3} : \dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$ (ist Möbius Transformation)

⌈ alternative Definition $\tilde{DV}(z; z_1, z_2, z_3) := \dfrac{z - z_1}{z - z_2} : \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ ⌋

Es gilt für DV:

$T(z_1) = DV(z_1; z_1, z_2, z_3) = 0$

$T(z_2) = DV(z_2; z_1, z_2, z_3) = 1$

$T(z_3) = DV(z_3; z_1, z_2, z_3) = \infty$

Ziel: $w = M(z)$ mit $w_i = M(z_i)$ $i = 1, 2, 3$

Betrachte $S(w) := DV(w; w_1, w_2, w_3)$

Dann $S(w_1) = 0$, $S(w_2) = 1$, $S(w_3) = \infty$

Damit erfüllt

$M := S^{-1} \circ T$

$M(z_i) = w_i$ $i = 1, 2, 3$

Praktisch: Löse $DV(\underset{M(z)}{w}; \underset{M(z_1)}{w_1}, \underset{M(z_2)}{w_2}, \underset{M(z_3)}{w_3}) = DV(z; z_1, z_2, z_3)$

nach w auf

Bsp: $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, $w_3 = -1$

$DV(w; w_1, w_2, w_3) = \dfrac{w - 1}{w + 1} : \dfrac{0 - 1}{0 + 1} = DV(z; z_1, z_2, z_3) = \dfrac{z - 1}{z + 1} : \dfrac{i - 1}{i + 1}$

$$2 \rightarrow \quad w = M(z) = \frac{zi+1}{z+i}$$

Hauptsatz für Möbius Transformationen

Möbius Transformationen führen Geraden und Kreislinien in Geraden oder Kreislinien über.

Nachweis: Nur für Inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$, weil Translationen und Drehstreckungen dies eh erfüllen.

Betrachte

$$K = \{ z \,;\, \alpha z\bar{z} + c z + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0 \quad \text{mit } \alpha, \delta \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{C} \text{ mit } c\bar{c} > \alpha\delta \}$$

Hier $c = c_1 + i c_2$, $z = x + iy$ Damit

$\alpha = 0$: $\quad cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0$ ist Gerade $2(c_1 x + c_2 y) + \delta = 0$

$\alpha \neq 0$: $\quad K = \{ (x,y) \,;\, (x + \frac{c_1}{\alpha})^2 + (y - \frac{c_2}{\alpha})^2 = \frac{c\bar{c} - \delta\alpha}{\alpha^2} \}$

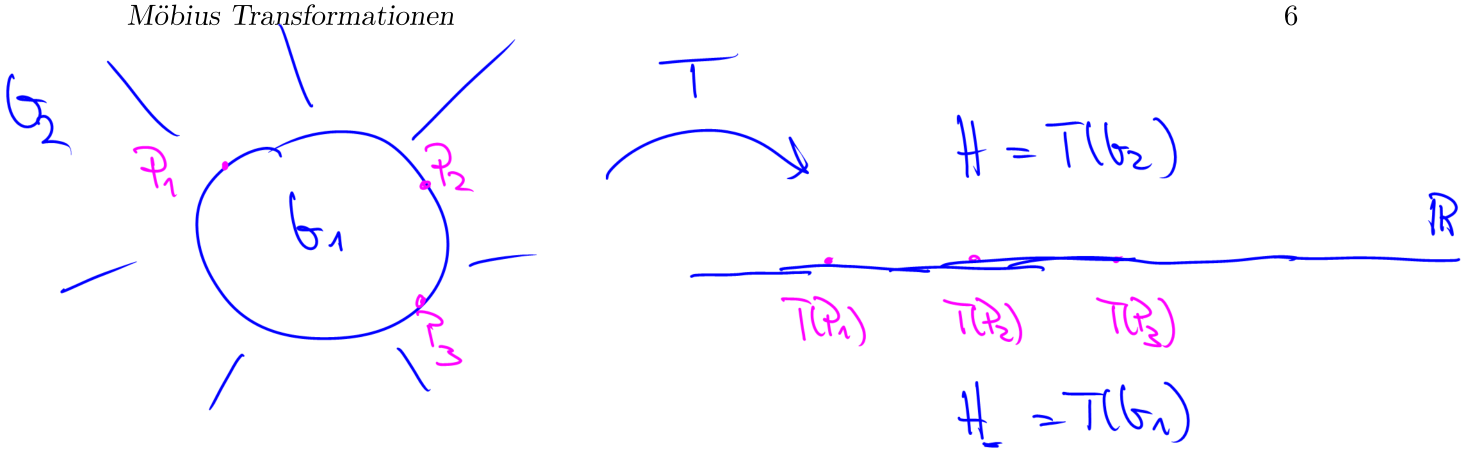
Beh: $w = \frac{1}{z}$ für $z \in K$ erfüllt

$$\alpha + \bar{d}\bar{w} + dw + \delta \bar{w} w = 0 \qquad \text{mit } d := \bar{c}$$

dies ist Kreis- (bzw Geraden-) gleichung

Nachweis: $\quad w\bar{w} \cdot 0 = w\bar{w}\alpha z\bar{z} + w\bar{w} c z + w\bar{w}\,\bar{c}\bar{z} + w\bar{w}\delta$

$w = \frac{1}{z}$: $\quad \alpha + \bar{w} c + w\bar{c} + w\bar{w}\delta$ ist Kreis- bzw Geradengleichung.


G2
P1
P2
G1
P3
T
H = T(G2)
R
T(P1)
T(P2)
T(P3)
H_ = T(G1)