Funktionentheorie/Komplexe Funktionen
TUHH
VL 1, 6. April 2017

Komplexe Zahlen und Funktionen

Michael Hinze

Exkurs komplexe Zahlen $\rightsquigarrow$ s. Beamerfolien

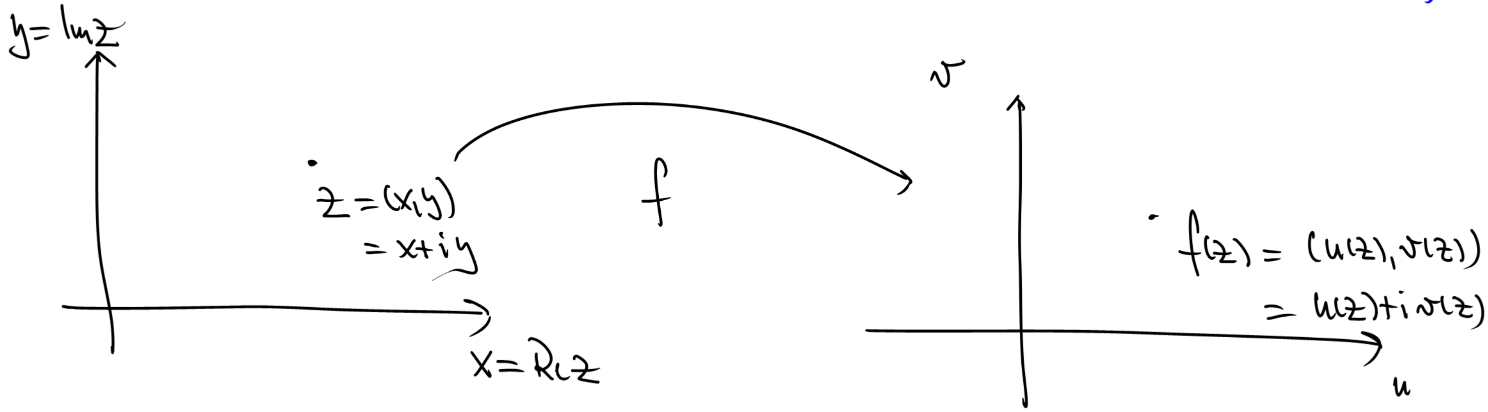
Komplexe Funktionen

$$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) \qquad \text{komplexe Funktion}$$

D Definitionsbereich

$W = \{ w \in \mathbb{C} ; \exists_{z \in D} : f(z) = w \}$ Wertebereich von f.

$$z = x + iy = (x, y) \mapsto f(z) = u(z) + i\,v(z) = (u(z), v(z))$$

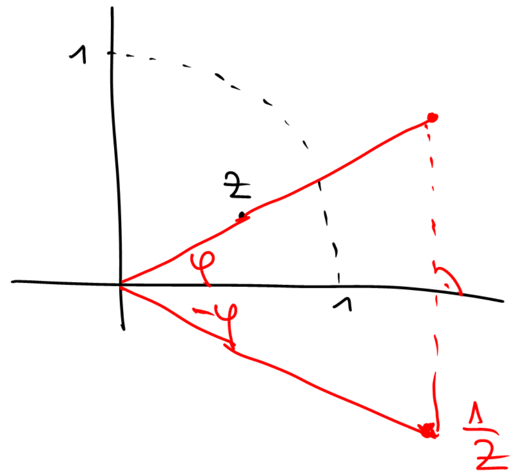


Bsp: $f(z) := \frac{1}{z} \quad D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Frage: Was macht f? Schreibe $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|} e^{-i\varphi}$

falls $z = |z| e^{i\varphi}$

Geometrisch



Wir sehen $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen an:

$L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2)$ und $L(\lambda z) = \lambda L(z)$

für alle $z_1, z_2, z, \lambda \in \mathbb{C}$.

Fasse L auf als Abb von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Sei $z = z_r + i z_i = (z_r, z_i)$. Dann $Lz = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ z_i \end{bmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

beliebig, falls L nur $\mathbb{R}$-linear

Welche Bedingungen an a, b, c, d müssen erfüllt sein, damit L $\mathbb{C}$-linear ist?

Betrachte $Lz = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ z_i \end{bmatrix}$ ist nicht $\mathbb{C}$-linear, denn betrachte $z = (1, 0)$

und $L(iz) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 + 0i \neq i Lz = i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i^2 = (-1 + 0i)$

$\mathbb{C}$ -Linearität erfordert

$$L(i) = i\,L(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d.h. $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ a \end{bmatrix}$, d.h. $b = -c$, $d = a$.

Also $L(z) = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_r \\ z_i \end{bmatrix}$

Brücke zum linearen Modell einer komplexen Funktion

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)}_{\mathbb{C}\text{- lineares Modell}} + R$$

Sei $f(z) = (u(z), v(z))$ mit $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = (x, y)$

$$f'(z) = \begin{bmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{bmatrix}$$ soll $\mathbb{C}$-linear sein

$\Longrightarrow$ $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ und $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$

Cauchy-Riemann Differentialgleichungen CRDGlen

Beachte: Aus CRDGlen folgt: ist f komplex diffbar, so sind die Komponentenfunktionen ∞-oft diffbar!

Konvergenz in $\mathbb{C}$ und Potenzreihen

$\mathbb{C} \supset (z_n)_n$; $\quad z_n \to z \;(n \to \infty) :\Longleftrightarrow |z - z_n| \to 0 \;(n \to \infty)$

gdw mit $z = x + iy$ und $z_n = x_n + iy_n$ gilt: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ in $\mathbb{R}$

Reihen sind Folgen von Partialsummen; damit Konvergenzbegriff für Potenzreihen klar: $a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$

$$S(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k}_{=: S_n(z)} \Big)_n$$

$$|S_n(z)| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, |z - z_0|^k$$

Konvergenz von $S(z)$ nun mit den gängigen Kriterien überprüfbar!

$a_k \neq 0$, $k \ge k_0$ $\quad \lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k \ge k_0}} \dfrac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ existiert. $\qquad$ Quotientenkriterium

Dann konvergiert $S(z)$ für alle z mit $|z - z_0| < R = \lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k \ge k_0}} \dfrac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$

Nutze Potenzreihen zur Definition elementarer komplexer Funktionen

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad z \in \mathbb{C} \qquad \text{Exponentialfunktion}$$

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \; z \in \mathbb{C} \qquad \text{Sinus Funktion}$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad z \in \mathbb{C} \qquad \text{Cosinus}$$

$$\cosh z := \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \qquad \text{Hyperbelfunktionen}$$

Es gilt

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

folgt Potenzreihendarstellung