Harmonische Funktionen

Eine reelle Funktion $\boldsymbol{\Phi(x, y)}$ mit

$$\boldsymbol{\Delta\,\Phi = 0}$$

heißt harmonisch.

Es gilt

$$\boldsymbol{\Delta\,\Phi} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{(\mathrm{grad}\Phi)},$$

also sind harmonische Funktionen Potentiale von quellenfreien ebenen Vektorfeldern **w**, denn Quellenfreiheit bedeutet

$$\boldsymbol{\mathrm{div}\mathbf{w} = 0.}$$

Ist nun $\boldsymbol{\Phi}$ Potential von **w**, d.h.

$$\boldsymbol{\mathbf{w} = \mathrm{grad}\Phi},$$

so folgt

$$\boldsymbol{\Delta\,\Phi = 0.}$$

Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen sind harmonisch

Sei $f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ analytisch. Dann ist f ∞—oft stetig differenzierbar, also auch Φ und Ψ. Mit dem Satz von Schwarz und den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erhalten wir

$$\Delta\,\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial\frac{\partial\Psi}{\partial y}}{\partial x} + \frac{\partial(-\frac{\partial\Psi}{\partial x})}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} = 0.$$

Analog zeigt man $\Delta\,\Psi = 0$ für den Imaginärteil von f, d.h. Φ und Ψ sind harmonische Funktionen.

Beziehung zwischen Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen

Sei Φ harmonisch. Dann erfüllt das Vektorfeld

$$\mathbf{w}(x,y) = \begin{pmatrix} w_1(x,y) \\ w_2(x,y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

die Integrabilitätsbedingung $\mathrm{rot}\mathbf{w} = \mathbf{0}$, denn aus $\Delta\,\Phi = 0$ folgt $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ und daraus folgt sofort $\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial y}$.
Ist der Definitionsbereich von Φ einfach zusammenhängend, so induziert die Integrabilitätsbedingung die Existenz eines Potentials $\Psi(x,y)$ mit von $\nabla\Psi = \mathbf{w}$. Ergo

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = w_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = w_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

also erfüllen Φ und Ψ die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, d.h.
$f(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$ ist analytisch.

Eigenschaften analytischer Funktionen

Satz 10.14: Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion $f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ sind harmonische Funktionen.

Satz 10.15: Eine auf einer einfach zusammenhängenden offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ harmonische Funktion Φ ist der Realteil einer analytischen Funktion f, deren Imaginärteil Ψ als Potential des Vektorfeldes

$$\mathbf{w}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

bestimmt werden kann.

Komplexes Potential

Schreibe das ebene Vektorfeld **v** in komplexer Form

$$v(z) = v(x+iy) := v_1(x,y) + iv_2(x,y). \tag{2}$$

Dann bezeichnet die analytische Funktion

$$f(z) = f(x+iy) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$$

das **komplexe Potential** von $v(z)$, falls $\mathbf{grad}\Phi = (v_1, v_2)^T$ gilt.

Wird durch **v** ein ebenes Geschwindigkeitsfeld beschrieben, heißt $f(z)$ komplexes Strömungspotential. Re$f = \Phi$ heißt Geschwindigkeitspotential, Im$f = \Psi$ Stromfunktion des Strömungsfeldes $v(z) = v_1(x,y) + iv_2(x,y)$.

Strömungen komplexer Strömungspotentiale

Sind mit der analytischen Funktion $f(z)$ ein komplexes Strömungspotential und mit K eine doppelpunktfreie geschlossene positiv orientierte Kurve gegeben, so lassen sich aus f durch die Beziehungen

$$v(z) = \overline{f'(z)}$$

$$Z = \operatorname{Re} \int_K f'(z)\, dz \qquad W = \operatorname{Im} \int_K f'(z)\, dz$$

die Geschwindigkeit $v(z)$, die Zirkulation Z entlang der Kurve K und der Fluss W durch die Kurve K bestimmen.

Harmonische Funktionen von analytischen Funktionen sind harmonisch.

Diese Aussage ist nützlich zum Auffinden einer harmonischen Funktion, die im Gebiet G gewissen Randbedingungen genügen soll, wobei das Gebiet G möglicherweise geometrisch kompliziert ist, so dass eine harmonische Funktion, die die geforderte Randbedingungen erfüllt, nicht ohne weiteres zu finden ist. Das ”komplizierte” Gebiet G wird durch eine analytische Funktion auf ein einfacheres Gebiet H abgebildet. Findet man nun in H eine harmonische Funktion U als Lösung eines einfacheren Randwertproblems, dann hat man mit $\Psi(x, y) = U(f(x + iy))$ die gesuchte Lösung des ursprünglichen Problems in G gefunden.