Die Exponentialfunktion

Definition: *Die* komplexe Exponentialfunktion $\mathbf{exp}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *können wir definieren durch*

$$\exp(z) \equiv e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \qquad \text{für } z = x + iy.$$

Es gilt das Additiontheorem

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \qquad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Verhalten der komplexen Exponentialfunktion $z \to \exp(z)$:
Für $w = \exp(z)$, $z = x + iy$ und $w = u + iv$ bekommen wir

$$w = u + iv = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

und somit

$$u = e^x\cos(y) \qquad \text{und} \qquad v = e^x\sin(y).$$

Geometrie von **exp** z

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur x-Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$\begin{aligned} u &= e^x \cos(y_0) \\ v &= e^x \sin(y_0) \end{aligned}$$

- Für festes y_0 ergibt dies ein vom Ursprung ausgehenden Strahl,

der mit der positiven x-Achse den Winkel y_0 einschließt.

- Für Winkel y_0 und y_1, die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, d.h.

$$y_1 = y_0 + 2\pi k \qquad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

  ergibt sich der gleiche Strahl.

- Genauer: Wegen der Periodizität von $\exp(z)$ gilt

$$e^{z+2\pi ik} = e^z e^{2\pi ik} = e^z(\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

  d.h. zwei Punkte mit gleichen Realteilen, deren Imaginärteile sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, werden auf den gleichen Punkt abgebildet.

Geometrie von **exp z**

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur y-Achse parallelen Geraden $x \equiv x_0$ bekommt man

$$u = e^{x_0} \cos(y) \qquad \text{und} \qquad v = e^{x_0} \sin(y)$$

- Für festes x_0 ergibt dies einen Kreis um Null mit Radius e^{x_0}.
- Der Nullpunkt liegt nicht im Bild der Exponentialfunktion, d.h. es

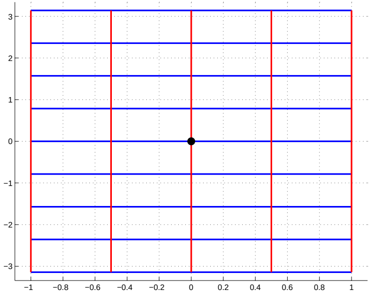
gibt kein Argument $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$. Somit gilt $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

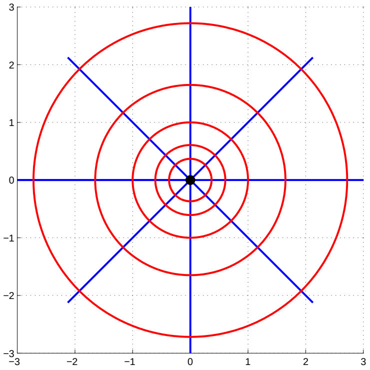
- **Beobachtung:** Die Exponentialfunktion bildet Rechtecksgitter im kartesischen Koordinatensystem auf ein Netz von Kurven ab, die sich rechtwinklig schneiden.

- **Noch allgemeiner:** Die Exponentialfunktion ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ `winkeltreu` (bzw. `konform`). Details dazu später.

Geometrie von **exp** z

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.





Buch Kap. 10.4 – Geometrie $\exp z$

Es gilt

$$\exp(D_k) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

wobei für $k \in \mathbb{Z}$

$$D_k := \{(x, y) \mid -\infty < x < \infty, -\pi + 2k\pi < y \leq \pi + 2k\pi\}.$$

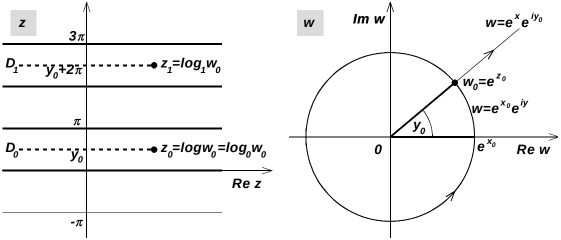


Abbildung 10.4: $w = e^z$

Die Umkehrfunktion

$f(z)$ heißt eineindeutig (injektiv)$:\Leftrightarrow$ zu jedem $w \in \mathbb{C}$ gibt es genau ein $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = w$.

- Injektive Funktionen nehmen jeden Wert ihres Wertebereichs genau einmal an.

- Man nennt injektive Funktionen auch schlicht.

Beispiele.

- die lineare Funktion $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, ist injektiv.
- die quadratische Funktion $f(z) = z^2$, ist *nicht* injektiv, denn es gilt $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- die komplexe Exponentialfunktion $\exp(z)$ ist *nicht* injektiv, denn es gilt $\exp(z) = \exp(z + 2\pi ik)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \mathbb{C}$.

Einschränkung des Definitionsbereichs.

Beispiel: Betrachte die quadratische Funktion

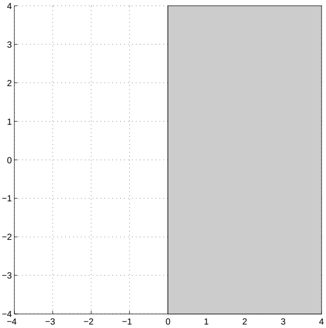
$$f(z) = z^2 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{Re}(z) > 0$$

auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Hier ist f injektiv.

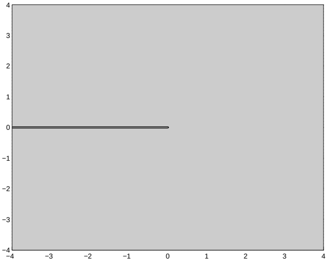
Weiterhin ist in diesem Fall der Bildbereich gegeben durch die aufgeschnittene komplexe Ebene

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \mathrm{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\} \end{aligned}$$

Wertebereich von $z \mapsto z^2$ auf rechter Halbebene



$D(z^2)$: Rechte Halbebene



$W(z^2)$: Aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$

Umkehrfunktion

Sei f injektiv mit Definitionsbereich $D(f)$ und Wertebereich $W(f)$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ zu f definiert durch

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(z) &= z \qquad \text{für alle } z \in D(f) \\ (f \circ f^{-1})(w) &= w \qquad \text{für alle } w \in W(f). \end{aligned}$$

Beispiel: Für den Definitionsbereich

$$D(f) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0 \text{ und } -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$$

existiert die Umkehrfunktion f^{-1} von $f(z) = z^2$ mit Wertebereich $W(f) = \mathbb{C}^-$.

Für den Hauptteil der Wurzel $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \qquad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Die Potenzfunktion

$$f(z) = z^n \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 2$$

ist für den Definitionsbereich

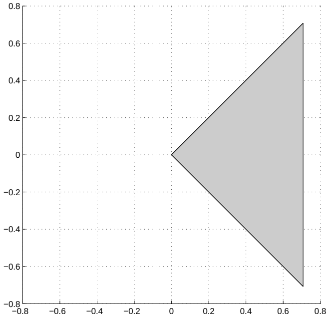
$$D(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n} \right\}$$

injektiv. Für den Wertebereich bekommt man in diesem Fall $W(f) = \mathbb{C}^-$.

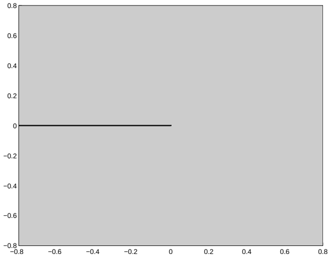
Für die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} \qquad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right).$$

$z \mapsto z^4$



$D(z^4)$: Rechtes 4tel



$W(z^4)$: Aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$

Der komplexe Logarithmus

Ziel: Umkehrung der komplexen Exponentialfunktion

$$f(z) = \exp(z).$$

Ausgangspunkt: Für $z = x + iy \in W(\exp)$ soll gelten

$$e^w = z \qquad \text{für ein } w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$|e^w| = |e^u| = |z|$$

und somit $u = \ln(|z|)$, wobei $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der *reelle* Logarithmus.
Weiterhin gilt

$$\arg(e^w) = \arg(e^{u+iv}) = \arg(e^u e^{iv}) = v$$

und somit $v = \arg(z)$.

Menge der Lösungen von $e^w = z$:

$$w = \log(|z|) + i \arg(z),$$

wobei für $\varphi = \arg(z)$ *jedes* Argument von z in Frage kommt.
Die Menge der Lösungen von $e^w = z$ heißt `komplexer Logarithmus` von z.

Der Hauptwert des Logarithmus

Die Exponentialfunktion ist auf dem Streifen

$$S = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(w) < \pi\}$$

injektiv ist. Der zugehörige Wertebereich ist $\mathbb{C}^-$.
Der einzige Wert von $\mathrm{Log}(z)$, der zu dem Streifen S gehört, ist

$$w = \log(|z|) + i \arg(z) \qquad \text{mit } -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Dieser Wert heißt der Hauptwert des Logarithmus von z, kurz $\mathrm{Log}(z)$.

Bemerkung: Der Hauptwert des Logarithmus ist nur in der aufgeschnittenen komplexen Ebene $\mathbb{C}^-$ definiert. Auf der negativen reellen Achse und bei $z = 0$ ist $\mathrm{Log}(z)$ nicht definiert. Auf der positiven reellen Achse stimmt $\mathrm{Log}(z)$ mit dem reellen Logarithmus $\log(x)$ überein.