

Klausur Komplexe Funktionen

31. August 2017

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studiengang:

AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	
-----	----	----	-----	-----	----	-----	----	--

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

--

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		

$\Sigma =$

Aufgabe 1) Es sei i die imaginäre Einheit und für $z \in \mathbb{C}$ wie üblich $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$.

- a) Gegeben sei die Menge $R = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{e^1}{2}, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$,
sowie die Abbildung

$$f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \ln(2z),$$

wobei \ln den Hauptwert des komplexen Logarithmus bezeichne.

- (i) Skizzieren Sie die Menge R in der komplexen Ebene.
(ii) Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung f .
- b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g: z = x+iy \mapsto g(z) = e^x \cdot [x \cos(y) - y \sin(y) + i \cdot y \cos(y) + i \cdot x \sin(y)]$$

auf ganz \mathbb{C} komplex differenzierbar ist.

- c) f sei eine auf ganz \mathbb{C} komplex differenzierbare Funktion mit

$$f(z) = f(x+iy) = x + 2y + x^3 - 3xy^2 + i \cdot v(x, y), \quad \text{mit } v(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Wie muss dann $v(x, y)$ aussehen?

Aufgabe 2)

- a) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2017}{x^2 + 9} dx$.

- b) Gegeben sei $f(z) = \frac{1}{(z-5)(z-3)^2}$.

- (i) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f .
(ii) Berechnen Sie $\oint_{\Gamma} f(z) dz$, $\Gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\Gamma(t) = 3 + e^{it}$.
(iii) Bestimmen Sie diejenige Laurent-Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 3$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = 2i$ gegen $f(2i)$ konvergiert.

Aufgabe 3) [4 Punkte]

f sei eine auf ganz \mathbb{C} komplex differenzierbare Funktion mit

$$f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y), \quad \text{mit } u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass u und v harmonische Funktionen sind.