Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2 (Hausaufgaben)

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Menge $S = \{3+r\cos(\phi)+ir\sin(\phi) : r \in]0,\infty[\,,\ \phi \in]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{8}[\,\} \subset \mathbb{C}$,

sowie die Abbildung

$$F(z) = \ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}(z-3)^2\right),$$

wobei $\ln$ den Hauptwert des komplexen Logarithmus bezeichnet.

a) Skizzieren Sie die Menge S in der komplexen Ebene.

   Es bezeichne $F(S)$ das Bild von S unter der Abbildung F. Skizzieren Sie $F(S)$ und beschreiben Sie $F(S)$ explizit als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

b) Bestimmen Sie das Bild $F(H)$ der Menge $H =]3,\infty[$ unter der Abbildung F.

c) Bestimmen Sie das Bild $F(R)$ der Menge $R = \{3+2e^{i\phi} : \phi \in]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{8}[\}$ unter der Abbildung F.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Möbius-Transformation

$$T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T(z) := \frac{10}{z+1}, \qquad \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

a) Bestimmen Sie die Bilder folgender Geraden unter der Abbildung T. Geben Sie dazu jeweils eine genaue Begründung an.

   (i) $g_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : \mathrm{Im}(z) = 0\}$.

   (ii) $g_2 = \{z \in \mathbb{C}^* : \mathrm{Re}(z) = 4\}$.

   (iii) $g_3 = \{z \in \mathbb{C}^* : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$.

b) Auf welche Menge wird dann das Innere des Dreiecks mit den Ecken $0,\ 4,\ 4+4i$ abgebildet?

   Fertigen Sie Skizzen der Urbild- und Bildebene an!

Abgabetermine: 02.05.17 - 05.05.17 bzw. 15.05.17 - 19.05.17