

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Sommersemester 2015

Literaturquellen.

- P. Henrici, R. Jeltsch: Komplexe Analysis für Ingenieure, Band 1, Birkhäuser Verlag, 1998.
- P. Henrici, R. Jeltsch: Komplexe Analysis für Ingenieure, Band 2, Birkhäuser Verlag, 1998.
- R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 2, 3. Auflage. WILEY-VCH, Berlin, 2000.

Inhalte Komplexe Funktionen.

Funktionentheorie bzw. Komplexe Analysis:

- Funktionen einer komplexen Variablen
- Möbius-Transformationen
- Komplexe Differentiation und Integration
- Ebene Potentialprobleme
- Konforme Abbildungen
- Cauchysche Integralformel und Anwendungen
- Taylor- und Laurent-Reihenentwicklungen
- Isolierte Singularitäten und Residuen
- Integraltransformationen: Fourier- und Laplace-Transformation
- Shannon-Abtasttheorem

1 Komplexe Zahlen

Ausgangspunkt: Wir wollen **alle** Gleichungen der Form

$$x^2 = a \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

lösen können.

Gute Nachricht:

Für nichtnegative $a \in [0, \infty)$ gibt es stets (mindestens) ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.

Schlechte Nachricht: Für negative $a \in (-\infty, 0)$ gibt es **kein** $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.

Beispiel: Für $a = -1$ gibt es keine reelle Zahl x mit

$$x^2 + 1 = 0.$$

Was nun? Um alle Gleichungen der Form $x^2 = a$ lösen zu können, müssen wir den Zahlbereich der reellen Zahlen erweitern. Diese **Zahlbereichserweiterung** führt uns zum **Körper der komplexen Zahlen**, \mathbb{C} .

Im folgenden wird die (algebraische und geometrische) Struktur von \mathbb{C} diskutiert.

Erste Ideen zur Einführung der komplexen Zahlen.

Startpunkt: Verwende *symbolische Lösung* i für Gleichung $x^2 + 1 = 0$, so dass

$$i^2 = -1.$$

Die Zahl i heißt **imaginäre Einheit**.

Nächster Schritt: Mit der imaginären Einheit bildet man nun die Zahlenmenge

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dann führt man die folgenden Rechenoperationen auf \mathbb{C} ein.

- **Addition:**

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

- **Multiplikation:**

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit besitzt \mathbb{C} eine algebraische Struktur.

Prinzipielle Fragen zu den komplexen Zahlen.

- Was ist eigentlich i ?
- Kann man mit den obigen Rechenoperationen widerspruchsfrei rechnen?
- Sind die Rechenoperationen konsistent mit den bekannten Rechenregeln in \mathbb{R} ?
- Kann man die komplexen Zahlen anordnen?
- Gibt es alternative Darstellungen für komplexe Zahlen?
- Sind mit Rechenoperationen in \mathbb{C} geometrische Interpretationen verbunden?
- ...
- Warum beschäftigen wir uns eigentlich mit komplexen Zahlen?
- ... und später mit komplexen Funktionen?
- Gibt es hierzu interessante Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften?

Erinnerung: Die reellen Zahlen \mathbb{R} bilden zusammen mit der Addition und der Multiplikation einen **Körper**. Es gelten folgende **Körperaxiome**.

- Axiome der Addition.

Assoziativgesetz $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad x + (y + z) = (x + y) + z$

Kommutativgesetz $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x + y = y + x$

Existenz der Null $\forall x \in \mathbb{R} \exists 0 \in \mathbb{R} : \quad x + 0 = x$

Existenz des Inversen $\forall x \in \mathbb{R} \exists -x \in \mathbb{R} : \quad x + (-x) = 0$

- Axiome der Multiplikation.

Assoziativgesetz $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad (xy)z = x(yz)$

Kommutativgesetz $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad xy = yx$

Existenz der Eins $\forall x \in \mathbb{R} \exists 1 \in \mathbb{R} : \quad x \cdot 1 = x$

Existenz des Inversen $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : \quad xx^{-1} = 1.$

- **Distributivgesetz** $x(y + z) = xy + yz$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Zur Konstruktion der komplexen Zahlen.

Ausgangspunkt: Betrachte die Menge $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mit **Addition**

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{für } (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$$

und **Multiplikation**

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \text{für } (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Beobachtung: Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ; weiterhin gilt

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) \quad \text{für } (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

d.h. $(1, 0) \in \mathbb{C}$ ist **neutrales Element der Multiplikation**. Die Gleichung

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \quad \text{für } (a, b) \neq (0, 0)$$

besitzt die eindeutige Lösung, das **multiplikative Inverse** zu (a, b) ,

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Zur Struktur der komplexen Zahlen.

Bemerkung: Die Menge \mathbb{R}^2 bildet mit der Addition und Multiplikation einen Körper, den **Körper der komplexen Zahlen**, ab sofort bezeichnet mit \mathbb{C} .

Übung:

Weise Axiome der Addition und Multiplikation sowie Distributivgesetz nach. \square

Beobachtung: Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\varphi(a) = (a, 0)$ ist injektiv. Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(a_1 + a_2) &= (a_1 + a_2, 0) = (a_1, 0) + (a_2, 0) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \\ \varphi(a_1 a_2) &= (a_1 a_2, 0) = (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2)\end{aligned}$$

Fazit:

- Können die reellen Zahlen mit komplexen Zahlen der Form $(a, 0)$ identifizieren;
- Die reellen Zahlen bilden einen **Unterkörper** von \mathbb{C} ;
- Die Rechenregeln in \mathbb{C} sind konsistent mit den Rechenregeln in \mathbb{R} .

Der Körper der reellen Zahlen ist angeordnet.

Bemerkung: Die reellen Zahlen bilden einen **angordneten Körper**; es gelten die folgenden **Anordnungsaxiome**.

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x > 0$ oder $x = 0$ oder $x < 0$;
- Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $x + y > 0$;
- Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $xy > 0$.

Frage: Ist der Körper der komplexen Zahlen, \mathbb{C} , angeordnet?

Antwort: NEIN!

Denn in einem angeordneten Körper sind von Null verschiedene Quadratzahlen positiv. Wäre \mathbb{C} angeordnet, so folgt aus

$$0 < 1^2 = 1 \quad \text{und} \quad 0 < i^2 = -1$$

der Widerspruch $0 < 1 + (-1) = 0$. \blacksquare

Zur einfacheren Notation der komplexen Zahlen.

Vereinfachung der Notationen:

- Für $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir a statt $(a, 0)$;
- Die komplexe Einheit $(0, 1)$ notieren wir mit i ;
- Damit lässt sich jede komplexe Zahl (a, b) schreiben als

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b \cdot i = a + ib.$$

und es gilt

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Fazit: Wir haben mit \mathbb{C} einen Körper konstruiert, der \mathbb{R} umfasst. Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

ist in \mathbb{C} lösbar. Die einzigen beiden Lösungen lauten $\pm i$.

Realteil und Imaginärteil.

Ab sofort bezeichnen wir komplexe Zahlen mit z oder w . Für

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}$$

heißt x der **Realteil** und y der **Imaginärteil** von z , kurz

$$x = \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w) \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w) \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Re}(az) = a\operatorname{Re}(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im}(az) = a\operatorname{Im}(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$$

und weiterhin

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{für } z \neq 0.$$

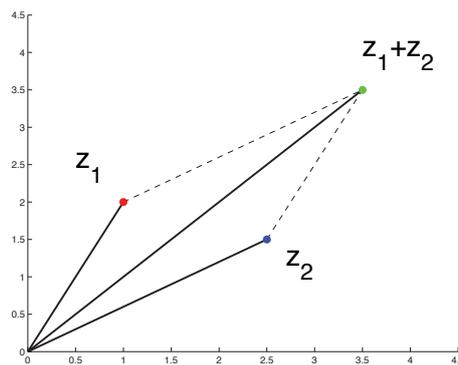
Die komplexe Zahlenebene.

Geometrische Veranschaulichung: Wir stellen $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ als **Punkt** in der **komplexen Zahlenebene (Gaußsche Zahlenebene)**

dar, gegeben durch das kartesische Koordinatensystem des \mathbb{R}^2 , mit einer **reellen Achse**, \mathbb{R} , und einer **imaginären Achse**, $i \cdot \mathbb{R}$.

Geometrische Veranschaulichung der Addition:

Durch übliche Addition der Ortsvektoren nach der Parallelogrammregel.



Addition zweier komplexer Zahlen.

Konjugation komplexer Zahlen.

Ordne durch Spiegelung an reeller Achse jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ mit

$$\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$$

konjugierte komplexe Zahl zu.

Es gelten die folgenden Rechenregeln.

$$\begin{aligned} \overline{w + z} &= \bar{w} + \bar{z} && \text{für } w, z \in \mathbb{C} \\ \overline{wz} &= \bar{w} \cdot \bar{z} && \text{für } w, z \in \mathbb{C} \\ \overline{(\bar{z})} &= z && \text{für } z \in \mathbb{C} \\ z\bar{z} &= x^2 + y^2 && \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C} \\ \operatorname{Re}(z) &= (z + \bar{z})/2 && \text{für } z \in \mathbb{C} \\ \operatorname{Im}(z) &= (z - \bar{z})/(2i) && \text{für } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $z = \bar{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$.

Die Betragsfunktion.

Setze

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

für den **Betrag** von z sowie $|w - z|$ für den **Abstand** zweier Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene.

- Somit stellt $|z| = |z - 0|$ den euklidischen Abstand von z zum Ursprung dar.
- Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt $|z|$ mit dem (üblichen) Betrag für reelle Zahlen überein.
- Es gelten die folgenden Abschätzungen.

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \text{und} \quad -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z| \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Satz: Die Betragsfunktion liefert eine **Norm** auf \mathbb{C} , denn es gelten die Relationen

- $|z| \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$;
- $|w + z| \leq |w| + |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ (**Dreiecksungleichung**);
- $|wz| = |w| \cdot |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.

Die Eulersche Formel.

In der komplexen Zahlenebene gilt für

$$z = x + iy$$

mit den **Polarkoordinaten**

$$(x, y) = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

die **Eulersche Formel**

$$z = |z| \exp(i\varphi) = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)),$$

wobei $\varphi \in (-\pi, \pi]$ für $z \neq 0$ den (eindeutigen) Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl von 0 durch $z = (x, y)$ darstellt.

Der Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ wird ebenso als **Argument** von $z \neq 0$ bezeichnet, kurz

$$\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi].$$

Beispiel: $i = (0, 1) = \exp(i\pi/2)$, $-1 = i^2 = \exp(i\pi)$, somit gilt $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Zur Geometrie der Multiplikation und Division.

Mit der Verwendung von Polarkoordinaten lässt sich die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ als **Drehstreckung** in der komplexen Zahlenebene interpretieren, denn für

$$w = |w|(\cos(\psi), \sin(\psi)) \quad \text{und} \quad z = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

gilt

$$\begin{aligned} wz &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi) + i \sin(\psi))(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \\ &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi + \varphi) + i \sin(\psi + \varphi)) = |w| \cdot |z| \exp(i(\psi + \varphi)) \end{aligned}$$

bzw. mit der Eulerschen Formel

$$wz = |w| \cdot |z| \exp(i\psi) \cdot \exp(i\varphi) = |w| \cdot |z| \exp(i(\psi + \varphi)).$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gilt analog

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \exp(i(\psi - \varphi)) = \frac{|w|}{|z|} (\cos(\psi - \varphi) + i \sin(\psi - \varphi)).$$

Potenzen und Einheitswurzeln.

Für die **n-te Potenz** z^n , $n \in \mathbb{N}$, von $z \in \mathbb{C}$ gilt die Darstellung

$$z^n = (|z| \exp(i\varphi))^n = |z|^n \exp(in\varphi) = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Die Gleichung

$$z^n = 1$$

besitzt die n paarweise verschiedenen Lösungen

$$z_k = \exp\left(i \frac{2\pi k}{n}\right) \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1.$$

Diese Lösungen werden als **n-te Einheitswurzeln** bezeichnet.

2 Komplexe Funktionen

Wir betrachten komplexwertige Funktionen f einer komplexen Variablen.

2.1 Begriff und geometrische Deutung

Definition: Eine **komplexe Funktion** ist eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils Punktmenge der komplexen Ebene sind. \square

Bemerkung: Eine komplexe Funktion $f : A \rightarrow B$ mit Definitionsbereich $A \subset \mathbb{C}$ und Wertebereich $B \subset \mathbb{C}$ ordnet jedem $z \in A$ ein eindeutiges $w = f(z) \in B$ zu.

Im konkreten Fall ist diese eindeutige Zuordnung

$$f : z \mapsto f(z) \quad \text{für } z \in A$$

durch eine *explizite* Abbildungsvorschrift gegeben.

Allerdings lassen sich (komplexe) Funktionen auch *implizit* definieren.

Beispiele für komplexe Funktionen.

- $f(z) = (3z + 1)^2$ für $z \in \mathbb{C}$;
- $f(z) = \exp(ix) + y$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$;
- $f(z) = 1/z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Man verwendet üblicherweise das Symbol $z \in \mathbb{C}$ für das **Urbild** und $w \in \mathbb{C}$ für den **Wert** von f , also $w = f(z)$. Weiterhin notieren wir $z = x + iy$ und

$$w = u + iv \quad \text{d.h. } u = \operatorname{Re}(w) \text{ und } v = \operatorname{Im}(w)$$

bzw.

$$u(z) = \operatorname{Re}(f(z)) \quad \text{und } v(z) = \operatorname{Im}(f(z)).$$

Frage: Wie stellen wir f graphisch dar?

Antwort: Wir skizzieren den Definitionsbereich und den Wertebereich in zwei verschiedenen komplexen Ebenen, der **z -Ebene** (**Urbildebene**) und der **w -Ebene** (**Bildebene**).

Komplexe Funktionen einer reellen Variablen.

Wir betrachten gelegentlich *komplexwertige* Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ mit einer *reellen* Variablen, d.h. für einen Definitionsbereich $I \subset \mathbb{R}$,

$$f : t \mapsto f(t) \in \mathbb{C} \quad \text{für } t \in I.$$

Beispiele.

- $f(t) = a + bt$ für $a, b \in \mathbb{C}$, wobei $b \neq 0$;
- $f(t) = \exp(i\omega t)$ für $\omega \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}$;

2.2 Lineare Funktionen

Definition: Eine komplexe Funktion f heißt **linear**, falls f für feste komplexe Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, eine Darstellung der folgenden Form besitzt.

$$f(z) = az + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

□

Frage: Wie können wir lineare Funktionen geometrisch deuten?

Spezialfall 1: Die Wahl $a = 1$ führt zu einer **Translation** um b ,

$$f(z) = z + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Spezialfall 2: Die Wahl $a \in (0, \infty)$ und $b = 0$ führt zu einer **Streckung** bzw. **Stauchung**,

$$f(z) = az \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

d.h. das Urbild z wird **gestreckt** ($a > 1$) oder **gestaucht** ($0 < a < 1$).

Allgemein spricht man von einer **Skalierung** mit **Skalierungsfaktor** $a > 0$.

Spezialfall 3: Die Wahl $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ und $b = 0$ führt zu einer **Drehung** (bzw. **Rotation**)

$$f(z) = az \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

genauer: Drehung um Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$, wobei $\alpha = \arg(a)$, bzw. $a = \exp(i\alpha)$.

Spezialfall 4: Die Wahl $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, und $b = 0$ führt zu einer **Drehstreckung**

$$f(z) = az \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

die wir als Komposition einer Rotation und einer Skalierung verstehen.

Genauer gilt: Für

$$a = |a| \exp(i\alpha) \quad \text{mit } \alpha = \arg(a)$$

handelt es sich um eine Rotation um Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ und Skalierung um $|a|$.

Allgemeiner Fall: Für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben:

- $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$ eine Drehung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$;
- $f_2(z) = |a|z$ eine Streckung um den Skalierungsfaktor $|a| > 0$;
- $f_3(z) = z + b$ eine Verschiebung um den Vektor b .

Bemerkung: Drehung f_1 und Streckung f_2 **kommutieren**, d.h. lassen sich vertauschen, denn es gilt

$$f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$$

und somit

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2.$$

□

2.3 Quadratische Funktionen

Definition: Eine komplexe Funktion f heißt **quadratisch**, falls f für feste Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, eine Darstellung der folgenden Form besitzt.

$$f(z) = az^2 + bz + c \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

□

Wir betrachten zunächst das geometrische Verhalten der quadratischen Funktion

$$f(z) = z^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Dazu betrachten wir die Bilder der achsenparallelen Geraden unter f .

Setze $w = z^2$. Dann ergibt die für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ die Darstellung

$$w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

und somit

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad v = 2xy.$$

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$.

Für das Bild einer zur x -Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y_0^2 \\ v &= 2xy_0 \end{aligned}$$

Für $y_0 = 0$ (die x -Achse) bekommen wir $u = x^2$ und $v = 0$.

Für $y_0 \neq 0$ können wir x mit $x = v/(2y_0)$ eliminieren, und bekommen somit

$$u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$$

eine nach rechts geöffnete Parabel, symmetrisch zur u -Achse mit Brennpunkt Null, und den Schnittpunkten $u = -y_0^2$ (mit u -Achse) und $v = \pm 2y_0^2$ (v -Achse).

Fazit: Die Schar zur x -Achse paralleler Geraden wird durch die quadratische Funktion $f(z) = z^2$ auf eine Schar **konfokaler** (d.h. gleiche Symmetrieachse, gleicher Brennpunkt) nach rechts geöffneter Parabeln abgebildet.

Die Geraden $y \equiv y_0$ und $y \equiv -y_0$ werden auf die gleiche Parabel abgebildet.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$.

Für das Bild einer zur y -Achse parallelen Geraden $x \equiv x_0$ bekommt man somit

$$u = x_0^2 - y^2$$

$$v = 2x_0y$$

Für $x_0 = 0$ (die y -Achse) bekommen wir $u = -y^2$ und $v = 0$.

Für $x_0 \neq 0$ können wir y mit $y = v/(2x_0)$ eliminieren, und bekommen somit

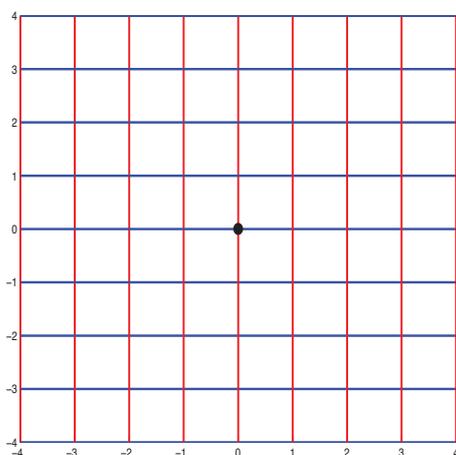
$$u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$$

eine nach links geöffnete Parabel, symmetrisch zur u -Achse mit Brennpunkt Null, und den Schnittpunkten $u = -x_0^2$ (mit u -Achse) und $v = \pm 2x_0^2$ (v -Achse).

Fazit: Die Schar zur y -Achse paralleler Geraden wird durch die Funktion $f(z) = z^2$ auf eine Schar konfokaler nach links geöffneter Parabeln abgebildet.

Die Geraden $x \equiv x_0$ und $x \equiv -x_0$ werden auf die gleiche Parabel abgebildet.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$.



Urbild.

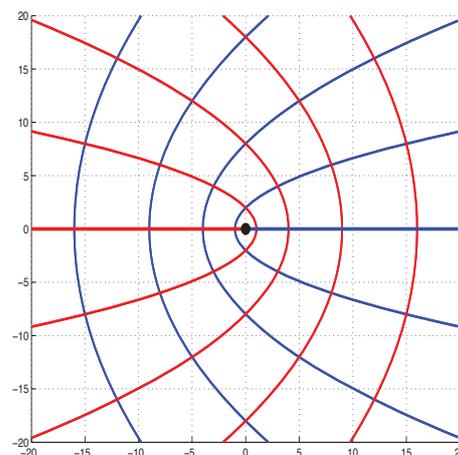


Bild von $f(z) = z^2$.

Allgemeine quadratische Funktionen.

Für $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, und mit der Darstellung

$$f(z) = az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

setzt sich jede quadratische Funktion als Komposition

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von vier Abbildungen zusammen:

- der Translation $f_1(z) = z + \frac{b}{2a}$;
- der quadratischen Funktion $f_2(z) = z^2$;
- der Drehstreckung $f_3(z) = az$;
- der Translation $f_4(z) = z - \frac{b^2}{4a} + c$.

□

2.4 Die Exponentialfunktion

Definition: Die **komplexe Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\exp(z) \equiv e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \quad \text{für } z = x + iy.$$

□

Beachte: Es gilt das Additionstheorem

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Frage: Wie sieht die komplexe Exponentialfunktion $z \rightarrow \exp(z)$ aus?

Für $w = \exp(z)$, $z = x + iy$ und $w = u + iv$ bekommen wir

$$w = u + iv = e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

und somit

$$u = e^x \cos(y) \quad \text{und} \quad v = e^x \sin(y).$$

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur x -Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$u = e^x \cos(y_0)$$

$$v = e^x \sin(y_0)$$

- Für festes y_0 ergibt dies ein vom Ursprung ausgehenden Strahl, der mit der positiven x -Achse den Winkel y_0 einschließt.
- Für Winkel y_0 und y_1 , die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, d.h.

$$y_1 = y_0 + 2\pi k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

ergibt sich der gleiche Strahl.

- Genauer: Wegen der **Periodizität** von $\exp(z)$ gilt

$$e^{z+2\pi ik} = e^z e^{2\pi ik} = e^z (\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k)) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

d.h. zwei Punkte mit gleichen Realteilen, deren Imaginärteile sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, werden auf den gleichen Punkt abgebildet.

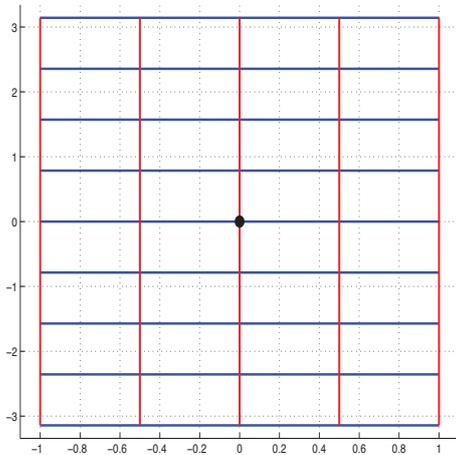
Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur y -Achse parallelen Geraden $x \equiv x_0$ bekommt man

$$u = e^{x_0} \cos(y) \quad \text{und} \quad v = e^{x_0} \sin(y)$$

- Für festes x_0 ergibt dies einen Kreis um Null mit Radius e^{x_0} .
- **Beachte:** Der Nullpunkt liegt nicht im Bild der Exponentialfunktion, d.h. es gibt kein Argument $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$. Somit gilt $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- **Beobachtung:** Die Exponentialfunktion bildet Rechtecksgitter im kartesischen Koordinatensystem auf Netz von Kurven ab, die sich rechtwinklig schneiden.
- **Genauer:** Kurven, die sich im kartesischen Koordinatensystem rechtwinklig schneiden, werden unter der Exponentialfunktion \exp auf Kurven abgebildet, die sich ebenso (im jeweiligen Schnittpunkt) rechtwinklig schneiden.
- **Noch allgemeiner:** Die Exponentialfunktion ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ **winkeltreu** (bzw. **konform**). Genauere Details dazu später.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.



Urbild.

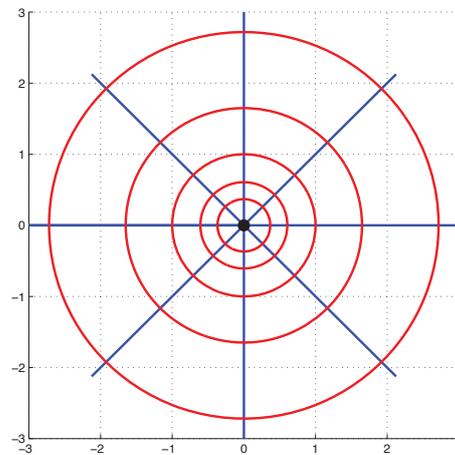


Bild von $f(z) = \exp(z)$.

2.5 Die Umkehrfunktion

Definition: Eine komplexe Funktion $f(z)$ heißt **eindeutig (injektiv)**, wenn es zu jedem Punkt $w \in \mathbb{C}$ ihres Wertebereichs genau einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ ihres Definitionsbereichs gibt mit $f(z) = w$. \square

- Injektive Funktionen nehmen jeden Wert ihres Wertebereichs genau einmal an.
- Man nennt injektive Funktionen auch **schlicht**.

Beispiele.

- die lineare Funktion $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, ist injektiv.
- die quadratische Funktion $f(z) = z^2$, ist *nicht* injektiv, denn es gilt $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- die komplexe Exponentialfunktion $\exp(z)$ ist *nicht* injektiv, denn es gilt $\exp(z) = \exp(z + 2\pi ik)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \mathbb{C}$.

Einschränkung des Definitionsbereichs.

Bemerkung: Eine nicht injektive Funktion wird ggf. durch eine geeignete Einschränkung ihres Definitionsbereichs injektiv.

Beispiel: Betrachte die quadratische Funktion

$$f(z) = z^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) > 0$$

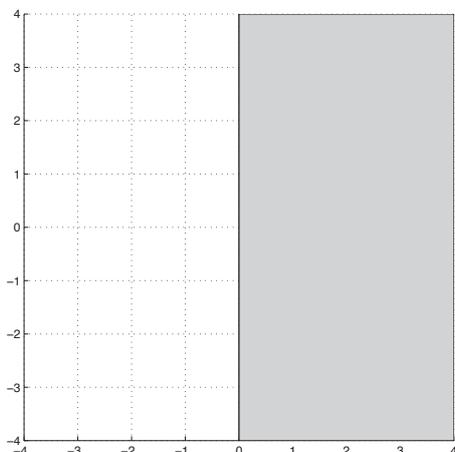
auf der **rechten Halbebene** $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Hier ist f injektiv.

Weiterhin ist in diesem Fall der Bildbereich gegeben durch die **aufgeschnittene komplexe Ebene**

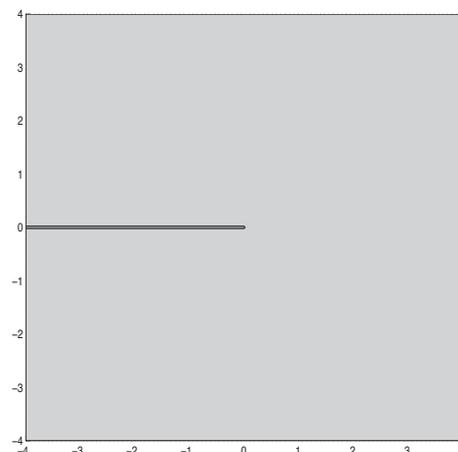
$$\begin{aligned} \mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\} \end{aligned}$$

□

Wertebereich von $z \mapsto z^2$ auf rechter Halbebene.



**Die rechte Halbebene
(Definitionsbereich)**



**Die aufgeschnittene komplexe Ebene \mathbb{C}^-
(Wertebereich)**

Umkehrfunktion.

Definition: Sei f eine injektive Funktion mit Definitionsbereich $D(f)$ und Wertebereich $W(f)$. Dann ist die **Umkehrfunktion** $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ zu f diejenige Funktion, die jedem Punkt $w \in W(f)$ den (eindeutigen) Punkt $z \in D(f)$ mit $f(z) = w$ zuordnet, d.h. es gilt $f^{-1}(w) = z$ bzw.

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(z) &= z && \text{für alle } z \in D(f) \\ (f \circ f^{-1})(w) &= w && \text{für alle } w \in W(f) \end{aligned}$$

□

Beispiel: Für den Definitionsbereich

$$D(f) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0 \text{ und } -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$$

existiert die Umkehrfunktion f^{-1} von $f(z) = z^2$ mit Wertebereich $W(f) = \mathbb{C}^-$.

Für den **Hauptwert der Wurzel** $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Umkehrfunktion der n -ten Potenz.

Beispiel: Die Potenzfunktion

$$f(z) = z^n \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 2$$

ist für den Definitionsbereich

$$D(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n} \right\}$$

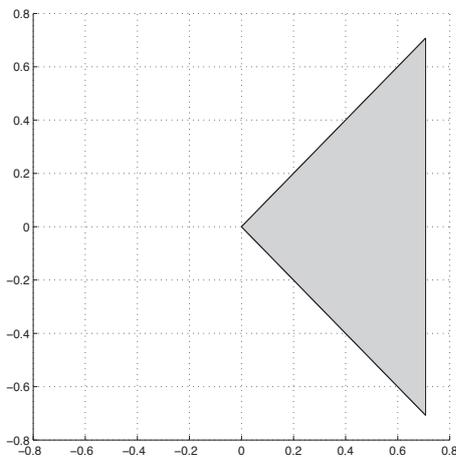
injektiv. Für den Wertebereich bekommt man in diesem Fall $W(f) = \mathbb{C}^-$.

Für die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ gilt

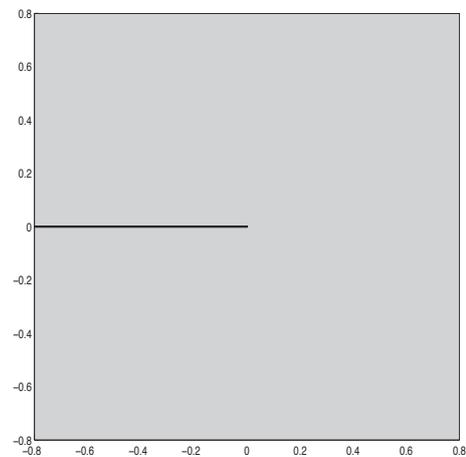
$$w = f^{-1}(z) = \sqrt[n]{r}e^{i\varphi/n} \quad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right).$$

□

Beispiel $n = 4$: Betrachte die Funktion $z \mapsto z^4$.



$\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \in (-\pi/4, \pi/4)\}$
(Definitionsbereich)



Die aufgeschnittene komplexe Ebene \mathbb{C}^-
(Wertebereich)

2.6 Der komplexe Logarithmus und allgemeine Potenzen

Ziel: Umkehrung der komplexen Exponentialfunktion

$$f(z) = \exp(z).$$

Beachte: Die Exponentialfunktion $\exp(z)$ ist für *alle* $z \in \mathbb{C}$ erklärt, und es gilt

$$D(\exp) = \mathbb{C} \quad \text{und} \quad W(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für den Definitions- und Wertebereich.

Aber: Die Exponentialfunktion ist nicht injektiv auf \mathbb{C} .

Also: Zur Konstruktion einer Umkehrfunktion \exp^{-1} von \exp müssen wir den Definitionsbereich von \exp geeignet einschränken.

Frage: Sei $z = x + iy \in W(\exp)$. Welche Werte $w = u + iv$ kommen in Frage, so dass

$$e^w = z$$

gilt?

Konstruktion des komplexen Logarithmus.

Ausgangspunkt: Für $z = x + iy \in W(\exp)$ soll gelten

$$e^w = z \quad \text{für ein } w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$|e^w| = |e^u| = |z|$$

und somit $u = \log(|z|)$, wobei $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der *reelle* Logarithmus.

Weiterhin gilt

$$\arg(e^w) = \arg(e^{u+iv}) = \arg(e^u e^{iv}) = v$$

und somit $v = \arg(z)$. Daher besteht die Menge der Lösungen von $e^w = z$ aus den komplexen Zahlen

$$w = \log(|z|) + i(\arg(z) + 2\pi k) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

und jedes $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = z$ heißt **Logarithmus** von z . Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet die Menge $\{\text{Log}(z)\} := \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$ den **mengenwertigen komplexen Logarithmus** von z . □

Der mengenwertige komplexe Logarithmus.

Beispiel 1: Wie sieht der komplexe Logarithmus $\{\text{Log}(-1)\}$ von -1 aus?

Zunächst gilt $\log(|-1|) = \log(1) = 0$.

Die Zahlen $\pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots$ sind die Argumente von -1 . Somit gilt

$$\{\text{Log}(-1)\} = \{i(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

für die Werte des Logarithmus von -1 .

Beispiel 2: Wie sieht der komplexe Logarithmus $\{\text{Log}(-1 + i)\}$ von $-1 + i$ aus?

Zunächst gilt $|-1 + i| = \sqrt{2}$ und weiterhin ist $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$ ein mögliches Argument von $-1 + i$. Somit gilt

$$\{\text{Log}(-1 + i)\} = \left\{ \log(\sqrt{2}) + i \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

für die Werte des Logarithmus von $-1 + i$.

Beispiel 3: Für $x > 0$ gilt $\{\text{Log}(x)\} = \{\log(x) + 2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Der Hauptwert des Logarithmus.

Die vorherigen Überlegungen zur Gleichung

$$z = e^w$$

zeigten, dass die Exponentialfunktion auf dem Streifen

$$S = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(w) < \pi\}$$

injektiv ist. Der zugehörige Wertebereich ist \mathbb{C}^- .

Der einzige Wert von $\{\operatorname{Log}(z)\}$, der zu dem Streifen S gehört, ist

$$w = \log(|z|) + i \arg(z) \quad \text{mit } -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Dieser Wert heißt der **Hauptwert des Logarithmus** von z , kurz $\operatorname{Log}(z)$. □

Bemerkung: Der Hauptwert des Logarithmus ist nur in der aufgeschnittenen komplexen Ebene \mathbb{C}^- definiert. Auf der negativen reellen Achse und bei $z = 0$ ist $\operatorname{Log}(z)$ nicht definiert. Auf der positiven reellen Achse stimmt $\operatorname{Log}(z)$ mit dem reellen Logarithmus $\log(x)$ überein. □

Die allgemeine Potenz.

Definition: Für $a, b \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\{a^b\}$ die Menge der komplexen Zahlen

$$e^{b\{\operatorname{Log}(a)\}} \quad \text{für } a \neq 0$$

wobei $\{\operatorname{Log}(a)\} = \{\log(|a|) + i(\arg(a) + 2\pi k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Somit gilt

$$\{a^b\} = \left\{ e^{b[\log(|a|) + i(\alpha + 2\pi k)]} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

wobei $\alpha = \arg(a)$. Liegt a in der aufgeschnittenen komplexen Ebene, $a \in \mathbb{C}^-$, so enthält die Menge $\{a^b\}$ den Wert

$$e^{b\operatorname{Log}(a)} = e^{b(\log(|a|) + i\alpha)} \quad \text{mit } \alpha = \arg(a) \in (-\pi, \pi).$$

Dieser Wert heißt der **Hauptwert** von $\{a^b\}$. □

Beispiele.

1.) Sei $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b = n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \{a^b\} &= \left\{ e^{n(\log(r)+i\alpha+2\pi ik)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{n \log(r)+in\alpha+2\pi ikn} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ r^n e^{in\alpha} e^{2\pi ikn} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = (re^{i\alpha})^n = r^n e^{in\alpha} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} \end{aligned}$$

2.) Für $x > 0$ ist $e^{i \operatorname{Log}(x)} = \cos(\log(x)) + i \sin(\log(x))$ Hauptwert von $\{x^i\}$.

3.) Sei $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \{a^{1/n}\} &= \left\{ e^{(1/n)(\log(r)+i\alpha+2\pi ik)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ r^{1/n} e^{i\alpha/n} e^{2\pi ik/n} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ r^{1/n} e^{i\alpha/n} e^{2\pi ik/n} \mid 0 \leq k < n \right\} \end{aligned}$$

d.h. die Werte z von $\{a^{1/n}\}$ sind die n -ten Wurzeln von a , so dass $z^n = a$, kurz

$$z = \sqrt[n]{a}$$

mit Hauptwert $r^{1/n} e^{i\alpha/n}$ für $\alpha/n = \arg(a)/n \in (-\pi/n, \pi/n)$. □

Bemerkung.

Die aus der reellen Analysis bekannte Funktionalgleichung

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \quad \text{für alle } a, b > 0$$

gilt für Hauptwerte des komplexen Logarithmus im Allgemeinen **nicht**, d.h. es gibt $a, b \in \mathbb{C}^-$ mit

$$\operatorname{Log}(ab) \neq \operatorname{Log}(a) + \operatorname{Log}(b),$$

Beispiel: Für $a = i$ und $b = -1 + i$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(i) + \operatorname{Log}(-1 + i) &= i\frac{\pi}{2} + \log(\sqrt{2}) + i\frac{3}{4}\pi = \log(\sqrt{2}) + i\frac{5}{4}\pi \\ &\neq \log(\sqrt{2}) - i\frac{3}{4}\pi = \operatorname{Log}(-1 - i) = \operatorname{Log}(i(-1 + i)). \end{aligned}$$

Weitere Bemerkung. Es gilt die Gleichung

$$\text{Hauptwert von } \{a^b\} \cdot \text{Hauptwert von } \{a^c\} = \text{Hauptwert von } \{a^{b+c}\}.$$

Beweis: Mit $\alpha := \arg(a) \in (-\pi, \pi)$ ist

$$A := e^{b[\log(|a|)+i\alpha]}$$

der Hauptwert von $\{a^b\} = \{e^{b[\log(|a|)+i(\alpha+2\pi k)]}\}$. Genauso ist

$$B := e^{c[\log(|a|)+i\alpha]}$$

der Hauptwert von $\{a^c\}$ und

$$C := e^{(b+c)[\log(|a|)+i\alpha]}$$

der Hauptwert von $\{a^{b+c}\}$.

Schließlich gilt

$$A \cdot B = e^{b[\log(|a|)+i\alpha]} \cdot e^{c[\log(|a|)+i\alpha]} = e^{(b+c)[\log(|a|)+i\alpha]} = C.$$



2.7 Die Joukowski-Funktion

Die **Joukowski-Funktion**, definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{für } z \neq 0,$$

ist im Zusammenhang mit Strömungsproblemen von Interesse (Details später).

Beobachtung: Es gilt die Symmetrie

$$f(z) = f(1/z) \quad \text{für } z \neq 0.$$

Ziel: Analysiere das geometrische Verhalten der Joukowski-Funktion.

Bestimme dazu für

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

die Bilder der Kreise $|z| \equiv \text{const}$ und der Strahlen $\arg(z) \equiv \text{const}$.

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{und} \quad w = u + iv$$

bekommen wir

$$u + iv = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right)$$

und somit

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi).$$

Für das Bild des Kreises $r \equiv r_0 > 0$ bekommen wir die Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \cos(\varphi) \\ v &= \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right) \sin(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

für den Einheitskreis $r_0 \equiv 1$ somit $u = \cos(\varphi)$, für $0 \leq \varphi < 2\pi$, und $v \equiv 0$, also die Strecke zwischen den Punkten -1 und 1 , die *zweimal* durchlaufen wird. \square

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für $r_0 \neq 1$ können wir φ eliminieren, womit man die Ellipse

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right)^2} = 1$$

mit den Halbachsen

$$a = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{2} \left| r_0 - \frac{1}{r_0} \right|$$

und Brennpunkten ± 1 bekommt.

Fazit: Die Joukowski-Funktion bildet eine Schar von Kreisen $r \equiv \text{const}$ auf eine Schar **kofokaler Ellipsen** ab. Die beiden Kreise $r \equiv r_0$ und $r \equiv 1/r_0$ werden dabei auf die gleiche Ellipse abgebildet. \square

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für das Bild eines Strahls $\varphi \equiv \varphi_0$ bekommt man

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi_0) \\ v &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi_0) \end{aligned} \right\} 0 < r < \infty,$$

für die positive x -Achse $\varphi_0 = 0$ somit

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} 0 < r < \infty,$$

das Stück $\{(u, 0) \mid 1 \leq u < \infty\}$ der u -Achse.

Analog erhalten wir für die negative x -Achse $\varphi_0 = \pi$ das Stück $-\infty < u < -1$.

Die Strahlen $\varphi_0 = \pi/2$ (positive y -Achse) und $\varphi_0 = 3\pi/2$ (negative y -Achse) werden auf die komplette v -Achse abgebildet.

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Falls $\varphi_0 \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, so können wir r eliminieren, womit wir die Hyperbel

$$\frac{u^2}{\cos^2(\varphi_0)} - \frac{v^2}{\sin^2(\varphi_0)} = 1$$

mit den Halbachsen

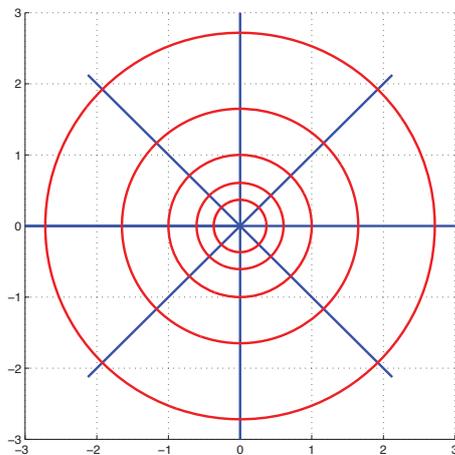
$$a = |\cos(\varphi_0)| \quad \text{und} \quad b = |\sin(\varphi_0)|$$

bekommen. Der Abstand der Brennpunkte der Hyperbel von Zentrum beträgt

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\cos^2(\varphi_0) + \sin^2(\varphi_0)} = 1.$$

Somit liegen die beiden Brennpunkte bei ± 1 .

Bilder unter der Joukowski-Funktion.



Urbild.

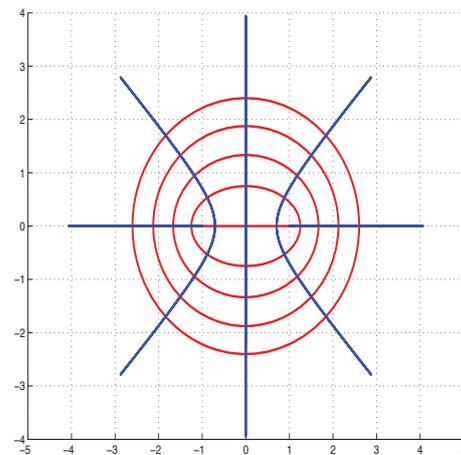


Bild der Joukowski-Funktion.

Weitere Bemerkungen zur Joukowski-Funktion.

Bemerkung und Fazit: Die Joukowski-Funktion bildet das Polarkoordinatennetz auf ein Netz von Ellipsen und Hyperbeln ab, die sich jeweils im rechten Winkel schneiden. Die Joukowski-Funktion ist winkeltreu.

Bemerkung: Die Joukowski-Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *nicht* injektiv, denn für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, 0\}$ gilt $z \neq 1/z$, aber $f(z) = f(1/z)$.

Bemerkung: Auf den folgenden zwei Einschränkungen ihres Definitionsbereichs ist die Joukowski-Funktion injektiv.

(a) Auf dem **Komplement des Einheitskreises** $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

(b) Auf der **oberen Halbebene** $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.

Bemerkung: Die Umkehrfunktion $w = f^{-1}(z)$ der Joukowski-Funktion $f(w)$ bekommt man durch Auflösen resultierenden der quadratischen Gleichung

$$w^2 - 2zw + 1 = 0$$

nach w in dem jeweiligen Definitionsbereich $D(f)$, somit $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$. \square

2.8 Komplexe trigonometrische Funktionen

Die Beziehungen der **Eulerschen Formel** sind für $x \in \mathbb{R}$ schon bekannt.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos(x) + i \sin(x) \\ e^{-ix} &= \cos(x) - i \sin(x) \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich durch Addition bzw. Subtraktion die Formeln

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) && \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) && \text{für } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die rechten Seiten sind jedoch auch für beliebige komplexe Argumente definiert. Somit setzen wir

$$\begin{aligned} \cos z &:= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) && \text{für } z \in \mathbb{C} \\ \sin z &:= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) && \text{für } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Rechenregeln für trigonometrische Funktionen.

Es gilt

$$\begin{aligned} \cos(z + 2\pi) &= \frac{1}{2} (e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{iz} e^{2\pi i} + e^{-iz} e^{-2\pi i}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \\ &= \cos(z) \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Analog zeigt man

$$\sin(z + 2\pi) = \sin(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Fazit: Die komplexen trigonometrischen Funktionen \sin und \cos sind (genauso wie die reellen trigonometrischen Funktionen) periodisch mit Periode 2π . \square

Weitere Rechenregeln.

Symmetrie.

$$\cos(z) = \cos(-z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) = -\sin(-z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

Phasenverschiebung.

$$\begin{aligned} \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2i} \left(e^{i(z+\pi/2)} - e^{-i(z+\pi/2)} \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{iz} e^{i\pi/2} - e^{-iz} e^{-i\pi/2} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(ie^{iz} - (-i)e^{-iz} \right) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \cos(z) \end{aligned}$$

Zerlegung der Eins.

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Additionstheoreme.

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2) \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1) \cos(z_2) + \cos(z_1) \sin(z_2) \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

3 Möbius-Transformationen

3.1 Die stereographische Projektion

Vorbemerkungen: Bei der Untersuchung rationaler Funktionen

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{mit Polynomen } p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

ist es sinnvoll, die *Lücken* des Definitionsbereichs (d.h. die Nullstellen von $q(z)$) dadurch zu schließen, dass man $R(z)$ dort den "Wert" ∞ zuordnet, sofern nicht gleichzeitig der Zähler $p(z)$ dort verschwindet.

Notation: Falls $z^* \in \mathbb{C}$ Nullstelle von q , d.h. $q(z^*) = 0$, und $p(z^*) \neq 0$, so schreibt man $R(z^*) := \infty$, d.h. der Wertebereich von R wird um die "Zahl" ∞ erweitert.

Definition: In der Erweiterung $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ der komplexen Zahlenebene wird ∞ als **unendlich ferner Punkt** bezeichnet. □

Erweiterung der Rechenregeln für \mathbb{C}^* .

Auf der erweiterten komplexen Zahlenebene \mathbb{C}^* werden folgende Rechenregeln (zusätzlich zu den üblichen Rechenregeln in \mathbb{C}) vereinbart.

$$\begin{aligned} a + \infty &:= \infty && \text{für } a \in \mathbb{C} \\ a \cdot \infty &:= \infty && \text{für } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ a/\infty &:= 0 && \text{für } a \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Warnung: Die Verknüpfungen $0 \cdot \infty$ und $\infty \pm \infty$ lassen sich nicht sinnvoll (d.h. nicht widerspruchsfrei) definieren.

Topologische Bedeutung: Die erweiterte komplexe Zahlenebene \mathbb{C}^* ist ein **topologischer Raum**. Für eine komplexe Zahlenfolge $\{z_n\}_n$, $z_n \neq 0$, gilt

$$z_n \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \iff \quad 1/z_n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

\mathbb{C}^* ist **folgenkompakt**, d.h. jede Folge in \mathbb{C}^* besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt. Daher wird \mathbb{C}^* als **Kompaktifizierung** von \mathbb{C} bezeichnet. \square

Die stereographische Projektion.

Definition: Die **stereographische Projektion** ist diejenige Abbildung $P: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ der **Riemannschen Zahlenkugel** $\mathbb{S}^2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \|X\| = 1\}$ auf die erweiterte komplexe Ebene \mathbb{C}^* , die jedem Punkt $X \in \mathbb{S}^2$, $X \neq N = (0, 0, 1)^T$, den Durchstoßpunkt $P(X)$ der Geraden durch X und N durch die X_1 - X_2 -Ebene zuordnet, und weiterhin $P(N) := \infty$.

Die stereographische Projektion besitzt die folgende analytische Darstellung.

$$z = P(X) = \frac{X_1 + iX_2}{1 - X_3} \in \mathbb{C}^* \quad \text{für } X = (X_1, X_2, X_3)^T \in \mathbb{S}^2.$$

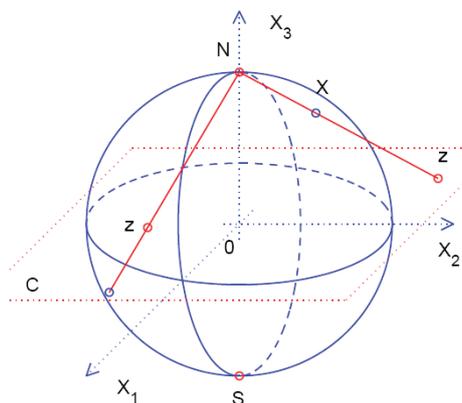
\square

Bemerkungen:

- Die stereographische Projektion $P: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist bijektiv.
- Die Umkehrabbildung P^{-1} von P ist gegeben durch

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^*.$$

Die stereographische Projektion $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$.



- Die obere Hälfte der Sphäre \mathbb{S}^2 (die obere Halbkugel) wird durch P auf $|z| > 1$ abgebildet, die untere Hälfte (untere Halbkugel) wird auf $|z| < 1$ abgebildet.

Der Äquator

$$A = \{X \in \mathbb{S}^2 \mid X = (X_1, X_2, 0)^T\}$$

bleibt fest, d.h. jeder Punkt $a \in A$ ist Fixpunkt von P , so dass $P(a) = a$. \square

Geometrie der stereographischen Projektion.

Unter einem **sphärischen Bild** U einer Menge $B \subset \mathbb{C}^*$ verstehen wir im folgenden das Urbild unter der stereographischen Projektion, so dass $P(U) = B$.

Satz: Für die stereographische Projektion gelten folgende Eigenschaften.

- Das sphärische Bild einer Geraden in \mathbb{C}^* ist ein Kreis auf \mathbb{S}^2 , der durch N geht.
- Ein Kreis auf \mathbb{S}^2 , der durch N geht, wird durch die stereographische Projektion auf eine Gerade in \mathbb{C}^* abgebildet.
- Das sphärische Bild eines Kreises in \mathbb{C} ist ein Kreis auf \mathbb{S}^2 , der nicht durch N geht.
- Ein Kreis auf \mathbb{S}^2 , der nicht durch N geht, wird durch die stereographische Projektion auf einen Kreis in \mathbb{C} abgebildet.
- Die stereographische Projektion ist **kreistreue**.

\square

3.2 Möbius-Transformationen

Definition: Eine rationale Abbildung der Form

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad \neq bc$$

heißt **Möbius-Transformation**. □

Bemerkungen: Für eine Möbius-Transformation $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ gilt:

- Zähler und Nenner haben verschiedene Nullstellen.
- $T(-d/c) = \infty$ und $T(\infty) = a/c$.
- $T(z)$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $T^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$,

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Beachte:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Komposition von Möbius-Transformationen.

Satz: Die Komposition zweier Möbius-Transformationen ist eine Möbius-Transformation. Genauer gilt:

$$\begin{aligned} w = T_1(z) &= \frac{az + b}{cz + d} && \text{für } ad \neq bc \\ u = (T_2 \circ T_1)(z) = T_2(w) &= \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} && \text{für } \alpha\delta \neq \beta\gamma \\ &= \frac{Az + B}{Cz + D} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

□

Kreistreue von Möbius-Transformationen.

Satz: Möbius-Transformationen sind kreistreu, d.h. (verallgemeinerte) Kreise in \mathbb{C}^* gehen durch Möbius-Transformationen in (verallgemeinerte) Kreise über.

Beweis: Sei $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad \neq bc$ eine Möbius-Transformation.

Fall (a): Für $c = 0$ ist T linear und somit kreistreu.

Fall (b): Für $c \neq 0$ zerlegen wir T wie folgt.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \frac{1}{cz+d}.$$

Im Folgenden zeigen wir, dass $f(z) = 1/z$ kreistreu ist.

Denn: Dann ist $T(z)$ (als Komposition kreistreuer Abbildungen) kreistreu.

Um zu zeigen, dass f kreistreu ist, wenden wir die (kreistreue!) stereographische Projektion auf $w = 1/z$ an.

Es gilt

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \frac{z-\bar{z}}{i(1+z\bar{z})}, \frac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2$$

Für das Bild von $1/z$ unter P^{-1} bekommen wir somit

$$\begin{aligned} X' &= F(X) = P^{-1}(1/z) \\ &= \left(\frac{1/z+1/\bar{z}}{1+(1/z)(1/\bar{z})}, \frac{1/z-1/\bar{z}}{i(1+(1/z)(1/\bar{z}))}, \frac{(1/z)(1/\bar{z})-1}{1+(1/z)(1/\bar{z})} \right)^T \\ &= \left(\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, -\frac{z-\bar{z}}{i(1+z\bar{z})}, -\frac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}} \right)^T \\ &= (X_1, -X_2, -X_3)^T \end{aligned}$$

Beachte: $F(X)$ beschreibt eine Drehung um die X_1 -Achse um den Winkel π . Die Abbildung $F(X)$ ist offensichtlich kreistreu, und somit ist die Komposition

$$f(z) = P \circ F \circ P^{-1}$$

kreistreu. ■

Bemerkungen zu Möbius-Transformationen.

Bemerkung: Für eine Möbius-Transformation

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad \neq bc$$

gelten die folgenden Eigenschaften.

- (Verallgemeinerte) Kreise durch den Punkt $-d/c$ werden durch T auf Geraden in der w -Ebene abgebildet.
- Alle Geraden der z -Ebene werden durch T in (verallgemeinerte) Kreise der w -Ebene durch den Punkt a/c abgebildet.
- Kreise, die *nicht* durch den Punkt $-d/c$ gehen, werden durch T in Kreise abgebildet, die *nicht* durch den Punkt a/c gehen.

□

Doppelverhältnisse und Möbius-Transformationen.

Satz: Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ jeweils paarweise verschieden. Dann gibt es genau eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, die die Interpolationsbedingungen

$$w_j = T(z_j) \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

erfüllt.

Die interpolierende Möbius-Transformation $T(z)$ ist gegeben durch die

Dreipunkteformel

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

□

Definition: Der Ausdruck

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

heißt das **Doppelverhältnis** der Punkte z_0, z_1, z_2, z_3 .

□

Beispiel.

Gesucht:

Eine Möbius-Transformation $T(z)$ mit $T(1) = i$, $T(i) = -i$ und $T(0) = 0$.

Nach der Dreipunkteformel bekommt man

$$\frac{w-i}{w+i} : \frac{0-i}{0+i} = \frac{z-1}{z-i} : \frac{0-1}{0-i}$$

und somit (durch Auflösen nach w)

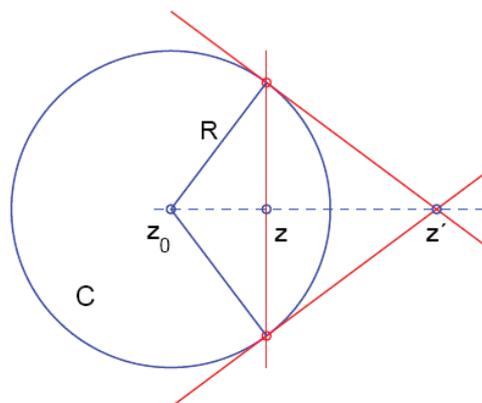
$$w = T(z) = \frac{(1+i)z}{(1+i)z - 2i}.$$

Übungsaufgabe:

Überprüfe die Gültigkeit der obigen Interpolationsbedingungen an $T(z)$. □

Symmetrie zum Kreis.

Liegen die Punkte z und z' wie in der folgenden Abbildung, so sagt man, die Punkte z und z' liegen **symmetrisch zum Kreis** $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$.



Die Punkte z und z' liegen symmetrisch zum Kreis C .

□

Bemerkungen zu Symmetrien zum Kreis.

- Die Abbildung $z \rightarrow z'$ heißt **Inversion am Kreis** bzw. **Spiegelung am Kreis**.
- Ein Punkt z mit $|z - z_0| \leq R$ ist stets zu einem Punkt z' mit $|z' - z_0| \geq R$ symmetrisch.
- Gilt $|z - z_0| = R$, so ist z zu sich selbst symmetrisch, d.h. $z' = z$.
- Der Punkt $z = z_0$ ist zu $z' = \infty$ symmetrisch.
- Es gilt $(z - z_0)\overline{(z' - z_0)} = R^2$.

□

Möbius-Transformationen und Kreissymmetrien.

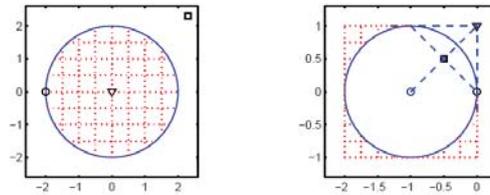
Satz:

Möbius-Transformationen erhalten Symmetrien zu (verallgemeinerten) Kreisen.

Genauer gilt:

Ist C ein (verallgemeinerter) Kreis in \mathbb{C}^ und liegen z und z' symmetrisch zu C , so liegen die Bilder von z, z' unter einer Möbius-Transformation symmetrisch zu demjenigen (verallgemeinerten) Kreis in \mathbb{C}^* , der das Bild von C darstellt. □*

Beispiel. Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, die den Kreis $|z| = 2$ auf den Kreis $|w + 1| = 1$ abbildet mit $T(-2) = 0$ und $T(0) = i$.



Lösung: $z_2 = 0$ und $z_3 = \infty$ liegen symmetrisch zu $|z| = 2$. Daher müssen die Bilder $w_2 = i$ und $w_3 = T(\infty)$ symmetrisch zum Kreis $|w + 1| = 1$ liegen. Somit gilt $(w_2 + 1)\overline{(w_3 + 1)} = 1$ und damit $w_3 = 0.5(-1 + i)$.

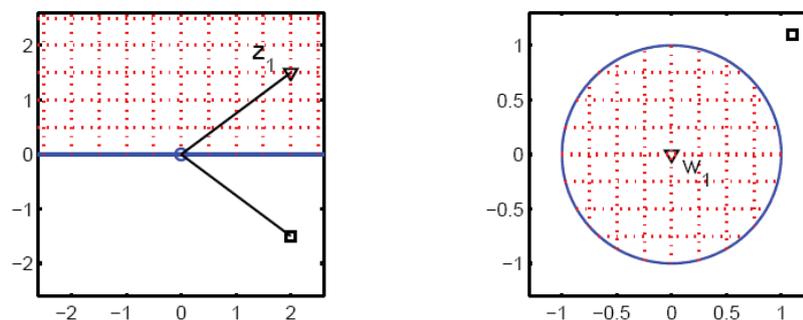
Mit der Dreipunkteformel folgt nun

$$\frac{w - 0}{w - i} : \frac{w_3 - 0}{w_3 - i} = \frac{z + 2}{z - 0} : \frac{z_3 + 2}{z_3 - 0} \Big|_{z_3 \rightarrow \infty},$$

und somit

$$w = T(z) = -\frac{z + 2}{(1 + i)z + 2i}. \quad \square$$

Beispiel. Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, die die obere Halbebene $\text{Im}(z) > 0$ auf die Kreisscheibe $|w| \leq 1$ abbildet und einen gegebenen Punkt z_1 mit $\text{Im}(z_1) > 0$ auf $w_1 = 0$ abbildet.



Lösung: Aus Symmetriegründen muss $z_2 = \overline{z_1}$ auf $w_2 = \infty$ abgebildet werden. Daraus folgt

$$w = c \frac{z - z_1}{z - \overline{z_1}} \quad \text{mit } |c| = 1.$$

□

Beispiel.

Für $b > a > 0$ betrachten wir die Möbius-Transformation

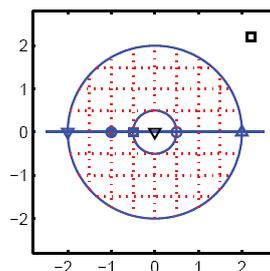
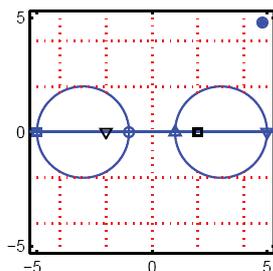
$$w = T(z) = \frac{z + p}{-z + p} \quad \text{wobei } p = \sqrt{ab} \in (a, b)$$

Für die folgenden Auswertungen von T bekommen wir

$$\begin{aligned} z_{1,2} = \pm p &\rightarrow w_{1,2} = \infty, 0 \\ z_{3,4} = a, b &\rightarrow w_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \pm \rho \text{ mit } \rho > 1 \\ z_{5,6} = -a, -b &\rightarrow w_{5,6} = \pm \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \pm \frac{1}{\rho} \\ z_{7,8} = 0, \infty &\rightarrow w_{7,8} = 1, -1. \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

- Die x -Achse wird durch T auf die u -Achse abgebildet.
- Punkte, die symmetrisch zur x -Achse liegen, werden auf Punkte abgebildet, die symmetrisch zur u -Achse liegen.
- Kreise, die symmetrisch zur x -Achse liegen, werden auf Kreise abgebildet, die symmetrisch zur u -Achse liegen.



Relevante Anwendung: Das elektrostatische Feld im Äußeren von zwei stromdurchflossenen parallelen Leitern wird in das Feld eines Zylinderkondensators abgebildet. □

4 Analytische Funktionen

4.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Fragen:

- Wie *differenziert* man (sinnvollerweise) komplexe Funktionen?
- Wie definiert man *Grenzwerte* im Komplexen?
- Was bedeutet *Stetigkeit* einer komplexen Funktionen?

Ansatz: Sei $f(z) : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion mit

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

wobei $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertig. Setze weiterhin $z = x + iy$, so dass

$$f(z) \equiv f(x, y) \quad u(z) \equiv u(x, y) \quad v(z) \equiv v(x, y).$$

Komplexe Differentiale.

Voraussetzungen:

- Sei $z_0 = x_0 + iy_0$ ein fester Punkt im Definitionsbereich $D(f)$ von f .
- Es gebe eine (offene) Umgebung um z_0 , in der die *reellen* Funktionen $u \equiv u(x, y)$, $v \equiv v(x, y)$ jeweils stetige partielle Ableitungen nach x, y haben, d.h. die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x und v_y sind stetig um (x_0, y_0) .

Dann gilt:

- Es existieren die **(totalen) Differentiale** du und dv in (x_0, y_0) .
- Mit $dx = x - x_0$ und $dy = y - y_0$ gilt (aus der reellen Analysis)

$$du = u_x(x_0, y_0)dx + u_y(x_0, y_0)dy$$

$$dv = v_x(x_0, y_0)dx + v_y(x_0, y_0)dy.$$

Definition: Unter dem **Differential** der Funktion $f = u + iv$ im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ verstehen wir die (in dx und dy) lineare Funktion

$$df = du + idv.$$

Differentiale und partielle Ableitungen.

Mit $df = du + idv$ hat das Differential von f in z_0 die Form

$$df = [u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)] dx + [u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)] dy.$$

Wir stellen die Koeffizienten von df (bez. dx und dy) nun durch entsprechende **partielle Ableitungen** f_x, f_y von f dar. Es gilt

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad h \rightarrow 0 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \end{aligned}$$

und somit gilt

$$f_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Zur weiteren Form des Differentials.

Entsprechend gilt

$$f_y(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)$$

und somit bekommen wir insgesamt

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Nun: Stelle df in Abhängigkeit von dz (statt von dx und dy) dar. Schreibe dazu

$$dz = z - z_0 = (x + iy) - (x_0 + iy_0) = dx + idy.$$

Beachte: Es gilt

$$\overline{dz} = \overline{z - z_0} = dx - idy$$

und somit

$$dx = \frac{1}{2} (dz + \overline{dz}) \quad \text{und} \quad dy = \frac{1}{2i} (dz - \overline{dz}).$$

Komplexe Differenzierbarkeit.

Damit bekommen wir weiterhin die Darstellung

$$df = Adz + B\overline{dz},$$

wobei

$$A = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0)) \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0))$$

und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - df}{dz} = 0.$$

Definition: Die Funktion f heißt **komplex differenzierbar** in z_0 , falls

$$df = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0))dz$$

d.h. falls $B = 0$. □

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen.

Falls f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt (mit $B = 0$)

$$f_x(z_0) + if_y(z_0) = 0$$

somit

$$u_x(z_0) + iv_x(z_0) + i[u_y(z_0) + iv_y(z_0)] = 0$$

bzw.

$$u_x(z_0) - v_y(z_0) + i[u_y(z_0) + v_x(z_0)] = 0.$$

Trennt man nach Real- und Imaginärteil, so bekommt man die

Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x.$$

Fazit: Die Funktion $f = u + iv$ ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn u und v in z_0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. □

Punktweise Differenzierbarkeit.

Beobachtung: Falls f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt

$$df = Adz \quad \text{mit } A = (f_x(z_0) - if_y(z_0))/2$$

und daher gilt für den *komplexen Zuwachs* $dz = \ell$

$$f(z_0 + \ell) - f(z_0) = A\ell + \Phi(\ell)$$

mit

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\Phi(\ell)}{\ell} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \ell) - f(z_0)}{\ell} = A.$$

Definition: Der Grenzwert

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \ell) - f(z_0)}{\ell}$$

heißt die **Ableitung** von f in z_0 , kurz

$$f'(z_0), \quad \frac{df}{dz}(z_0), \quad Df(z_0)$$

□

Komplexe Differenzierbarkeit und Ableitungen.

Bemerkungen:

- Wir bilden Ableitungen einer komplexen Funktion wie im Reellen, nämlich unter Verwendung von Differenzenquotienten.
- Im Reellen lässt sich die Ableitung geometrisch als Tangentensteigung interpretieren. Wie verhält sich dies im Komplexen? (Antwort später!)
- Aus der komplexen Differenzierbarkeit folgt die Existenz einer Ableitung.
- Umgekehrt: Aus der Existenz einer Ableitung folgt die Differenzierbarkeit.

Denn: Aus der Existenz der Ableitung in $z_0 = x_0 + iy_0$ folgt insbesondere

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(z_0)$$

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{ih} = \frac{1}{i} f_y(z_0)$$

und somit ($B = 0$)

$$f_x(z_0) = -if_y(z_0)$$

Zusammenfassung der bisherigen Diskussion.

Satz: Sei $f = u + iv$ eine komplexe Funktion mit Definitionsbereich $D(f)$.

Weiterhin sei $z_0 \in D(f)$, so dass u, v in einer Umgebung von z_0 stetig partiell nach x, y differenzierbar sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (a) f ist komplex differenzierbar in z_0 ;
- (b) u und v genügen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;
- (c) Die Ableitung von f existiert in z_0 .

□

Bemerkung: Weiterhin folgt (aus der bisherigen Diskussion) die Beziehung

$$df = f'(z_0)dz$$

falls f in z_0 komplex differenzierbar. Schließlich gilt

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0).$$

□

Beispiel.

Für $f(z) = z^2$ gilt

$$f(x, y) = f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

und somit

$$f_x(x, y) = 2x + 2iy \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = -2y + 2ix = if_x(x, y)$$

Für jedes $z = z_0$ gilt $B = 0$ und $A = 2z_0$, d.h.

$$df = 2z_0 dz.$$

Somit ist $f(z)$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt

$$f'(z_0) = 2z_0 \quad \text{für } z_0 \in \mathbb{C}.$$

Etwas direkter:

$$\frac{f(z_0 + \ell) - f(z_0)}{\ell} = \frac{(z_0 + \ell)^2 - z_0^2}{\ell} = \frac{2z_0\ell + \ell^2}{\ell} = 2z_0 + \ell \longrightarrow 2z_0 \quad \text{für } \ell \rightarrow 0.$$

□

Beispiel.

Für $f(z) = \bar{z}$ gilt

$$f(x, y) = f(z) = \bar{z} = x - iy$$

und somit

$$f_x(x, y) = 1 \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = -i.$$

Für jedes $z = z_0$ gilt

$$A = \frac{1}{2}(f_x(x, y) - if_y(x, y)) = 0 \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2}(f_x(x, y) + if_y(x, y)) = \frac{1 - i^2}{2} = 1,$$

also $A \equiv 0$, $B \neq 0$ und $df = \bar{d}z$.

Fazit: Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist in keinem Punkt der komplexen Ebene komplex differenzierbar, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nirgends erfüllt, und die Ableitung von f existiert in keinem Punkt. \square

Beispiel.

Für $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ gilt

$$f(x, y) = |z|^2 = x^2 + y^2, \quad f_x(x, y) = 2x \quad f_y(x, y) = 2y$$

und somit für $z_0 \in \mathbb{C}$

$$A = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0)) = \bar{z}_0$$

und

$$B = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0)) = z_0$$

und somit

$$df = \bar{z}_0 dz + z_0 d\bar{z}.$$

Fazit: Die Funktion $f(z) = |z|^2$ ist nur im Nullpunkt $z_0 = 0$ komplex differenzierbar, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nur im Nullpunkt erfüllt, und die Ableitung von f existiert nur im Nullpunkt mit $f'(0) = 0$. \square

Beispiel.

Für $f(z) = \exp(z)$ gilt mit $f = u + iv$ die Zerlegung

$$f(x, y) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y)),$$

somit

$$u(x, y) = e^x \cos(y) \quad \text{und} \quad v(x, y) = e^x \sin(y)$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= e^x \cos(y) = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) &= -e^x \sin(y) = -v_x(x, y). \end{aligned}$$

Somit sind die Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen in jedem Punkt der komplexen Ebene erfüllt, d.h. die Funktion $f(z) = \exp(z)$ ist überall komplex differenzierbar. Für die Ableitung gilt

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) = e^z = f(z).$$

□

4.2 Analytische Funktionen

Nun: Lassen als Definitionsbereiche nur Gebiete zu.

Definition: Ein **Gebiet** ist eine zusammenhängende offene Punktmenge der komplexen Ebene. □

Beispiele: Die folgenden Punktmenge komplexer Zahlen sind Gebiete.

- die komplexe Ebene \mathbb{C} ;
- die aufgeschnittene komplexe Ebene \mathbb{C}^- ;
- die komplexe Ebene ohne die Punkte $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = i$;
- die offene Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;
- ein Kreisring ohne Rand, z.B. $\{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z| < 7\}$.

Aber:

Eine Kreisscheibe mit Rand ist kein Gebiet, eine solche Menge ist nicht offen. □

Analytische (Holomorphe) Funktionen.

Definition: Eine komplexe Funktion $f(z)$, $z \in D(f)$, heißt **analytisch** (bzw. **holomorph**), falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- $D(f)$ ist ein Gebiet;
- f ist in jedem Punkt $z \in D(f)$ komplex differenzierbar.

□

Bemerkung: Die obige zweite Bedingung ist jeweils äquivalent zu den beiden folgenden Bedingungen.

- Real- und Imaginärteil von f genügen in jedem Punkt $z \in D(f)$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;
- die Funktion f besitzt in jedem Punkt $z \in D(f)$ eine Ableitung.

Bemerkung: Eine analytische Funktion ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig.

□

Differentiationsregeln für analytische Funktionen.

Satz: Die Funktionen f und g seien analytisch in einem Gebiet G . Dann sind die Funktionen $f + g$ und fg ebenfalls analytisch in G . Gilt $g(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, so ist weiterhin f/g analytisch in G . Es gelten die folgenden Differentiationsregeln.

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

□

Ganze Funktionen.

Definition: Eine Funktion, die in der komplexen Ebene analytisch ist, heißt **ganze Funktion** □

Bemerkung: Jedes komplexe Polynom

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

ist eine ganze Funktion.

Denn: Konstanten $f_c(z) \equiv c \in \mathbb{C}$ sind ganz mit $f'_c(z) \equiv 0$. Weiterhin ist die Identität $g(z) = z$ ganz mit $g'(z) = 1$. Da sich jedes Polynom $p(z)$ als Komposition von Funktionen f_c und g schreiben lässt, ist $p(z)$ ganz mit

$$p'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}.$$

□

Bemerkung: Die komplexe Exponentialfunktion $f(z) = \exp(z)$ ist ganz. □

Zusammensetzung analytischer Funktionen.

Betrachte analytische Funktionen

$$g : D(g) \rightarrow W(g) \quad \text{und} \quad f : D(f) \rightarrow W(f)$$

mit $W(g) \subset D(f)$.

Satz: Die Komposition $f \circ g$ zweier analytischer Funktionen f und g mit $W(g) \subset D(f)$ ist analytisch, und es gilt die **Kettenregel**

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

bzw.

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0) \quad \text{für alle } z_0 \in D(f \circ g) = D(g).$$

□

Umkehrung analytischer Funktionen.

Betrachte bijektive analytische Funktion

$$f : D(f) \rightarrow W(f)$$

mit Umkehrfunktion

$$f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f).$$

Satz: Die Umkehrfunktion f^{-1} einer bijektiven analytischen Funktion f ist analytisch, und es gilt

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

bzw.

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1})(w_0)} \quad \text{für alle } w_0 \in D(f^{-1}) = W(f).$$

□

Beispiele.

Beispiel 1: Betrachte $f(z) = z^2$ auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Dort ist f injektiv mit Wertebereich \mathbb{C}^- . Die Umkehrfunktion $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$ ist der Hauptwert der Wurzelfunktion, und es gilt

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

Beispiel 2: Betrachte $f(z) = \exp(z)$ auf dem Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$. Dort ist f injektiv mit Wertebereich \mathbb{C}^- . Die Umkehrfunktion $f^{-1}(z) = \operatorname{Log}(z)$ ist der Hauptwert des Logarithmus, und es gilt

$$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{e^{\operatorname{Log}(z)}} = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

Beispiel 3: Für $f(z) = z^a$, den Hauptwert von $\{z^a\}$, $z \in \mathbb{C}^-$ und $a \in \mathbb{C}$ fest, gilt

$$(z^a)' = az^{a-1} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

□

4.3 Geometrie der komplexen Differenzierbarkeit

Sei $f : D(f) \rightarrow W(f)$ eine analytische Funktion und $z_0 \in D(f)$ ein Punkt. Weiterhin sei

$$\Gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\} \subset D(f)$$

eine Kurve, die z_0 enthält, d.h. $z_0 = \Gamma(t_0)$ für ein $t_0 \in [\alpha, \beta]$.

Schließlich seien $x(t)$ und $y(t)$ in t_0 differenzierbar. Dann ist $z(t)$ in t_0 differenzierbar mit Ableitung

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

Im folgenden setzen wir $z'(t_0) \neq 0$ voraus.

Frage: Wie verhält sich die Kurve Γ unter der Abbildung f ?

Betrachte dazu das Bild

$$\Gamma^* = \{w(t) = f(z(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

mit $w(t_0) = f(z(t_0))$, kurz $w_0 = f(z_0)$.

Geometrische Interpretationen.

Beachte: Der Tangentenvektor $w'(t_0)$ von Γ^* in w_0 berechnet sich nach der Kettenregel zu

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0).$$

Für $f'(z_0) \neq 0$ gilt dann

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0)).$$

bzw.

$$\alpha^* = \alpha + \omega$$

für $\alpha^* = \arg(w'(t_0))$, $\alpha = \arg(z'(t_0))$ und $\omega = \arg(f'(z_0))$.

Geometrische Interpretationen:

- Man erhält den Tangentenvektor von Γ^* durch Drehung von Γ um Winkel ω ;
- Der Drehwinkel ω hängt von f und z_0 ab, aber nicht von Γ ;
- Der Tangentenvektor *jeder* Kurve durch z_0 wird durch die Abbildung f um den Winkel $\omega = \arg(f'(z_0))$ gedreht. □

Winkeltreue (Konforme) Abbildungen.

Definition: Eine Abbildung $f : D(f) \rightarrow W(f)$, unter der alle Winkel (inklusive deren Orientierung) erhalten bleiben, nennt man **winkeltreu** bzw. **konform**. \square

Satz: Eine analytische Funktion $f : D(f) \rightarrow W(f)$ ist in jedem Punkt $z_0 \in D(f)$ mit $f'(z_0) \neq 0$ konform. \square

Weiterhin gilt die folgende Umkehrung des Satzes.

Satz: Sei $f : D(f) \rightarrow W(f)$ in $z_0 \in D(f)$ konform. Weiterhin seien Real- und Imaginärteil $u(z)$ und $v(z)$ von $f = u + iv$ in einer Umgebung von z_0 stetig differenzierbar. Dann ist f komplex differenzierbar mit $f'(z_0) \neq 0$. \square

5 Ebene Potentialprobleme

Ziel: Lösung ebener Potentialprobleme mit *konformen* Abbildungen f .

Methode: Konstruktion von *konformen* Transformationen.

5.1 Konforme Transformation von Potentialen

Ausgangssituation:

- Sei $f : G \rightarrow G'$ analytisch, bijektiv, und *konform*, für Gebiete $G, G' \subset \mathbb{C}$.
- Somit gibt es eine Umkehrabbildung $f^{-1} : G' \rightarrow G$ mit

$$z = f^{-1}(w) \quad \text{für } w = f(z) \quad \text{wobei } z = x + iy \in G, w = u + iv \in G'.$$

- Weiterhin sei in G eine *reellwertige* zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$\Phi : (x, y) \rightarrow \Phi(x, y) = \Phi(z) \in \mathbb{R} \quad \text{für } z \in G$$

definiert.

Konforme Transformationen.

Dann gibt es eine Abbildung

$$\Psi := \Phi(f^{-1}) : G' \rightarrow \mathbb{R}$$

bzw.

$$\Psi : (u, v) \rightarrow \Psi(u, v) = \Psi(w) := \Phi(f^{-1}(w)) \in \mathbb{R} \quad \text{für } w \in G'$$

Definition: Die obige Konstruktion von Ψ nennt man **konforme Transformation** von Φ mit der Abbildung f . □

Physikalische Anwendungen: Im folgenden sind Φ und Ψ **Potentiale**, z.B.

- elektrostatische Potentiale;
- Strömungspotentiale;
- Temperaturfelder etc.

Dabei sind die Vektoren (Φ_x, Φ_y) und (Ψ_u, Ψ_v) von besonderem Interesse.

Komplexe Gradienten.

Definition: Unter dem **komplexen Gradienten** $\text{grad}(\Phi)$ von Φ verstehen wir die Funktion

$$\text{grad}((\Phi)(x, y)) = \Phi_x(x, y) + i\Phi_y(x, y)$$

□

Bemerkungen:

- Der komplexe Gradient fasst den *üblichen* Gradienten als komplexe Zahl auf.
- Entsprechend ist der komplexe Gradient $\text{grad}(\Psi)$ von Ψ gegeben durch

$$\text{grad}((\Psi)(u, v)) = \Psi_u(u, v) + i\Psi_v(u, v).$$

Frage:

Wie verhalten sich komplexe Gradienten bei konformen Transformationen?

Transformationen von komplexen Gradienten.

Ausgangspunkt: Sei $\Phi(x, y) = \Psi(u(x, y), v(x, y))$ mit

$$u(x, y) = u(z) \quad v(x, y) = v(z) \quad u(z) + iv(z) = f(z).$$

Dann gilt (nach Kettenregel)

$$\Phi_x = \Psi_u(u(x, y), v(x, y))u_x(x, y) + \Psi_v(u(x, y), v(x, y))v_x(x, y)$$

$$\Phi_y = \Psi_u(u(x, y), v(x, y))u_y(x, y) + \Psi_v(u(x, y), v(x, y))v_y(x, y)$$

und somit

$$\text{grad}(\Phi) = \Phi_x + i\Phi_y = \Psi_u(u_x + iu_y) + \Psi_v(v_x + iv_y),$$

bzw. mit Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ gilt

$$\text{grad}(\Phi) = (\Psi_u + i\Psi_v)(u_x - iv_x) = \text{grad}(\Psi) \cdot (u_x - iv_x).$$

Erinnerung: Es gilt

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) \quad \text{und} \quad \overline{f'(z)} = u_x(z) - iv_x(z).$$

Erster Transformationssatz.

Satz: Geht Ψ durch Transformation mit der analytischen Abbildung f aus Φ hervor, so gilt

$$\text{grad}(\Phi)(z) = \text{grad}(\Psi)(w) \cdot \overline{f'(z)}$$

wobei $w = f(z)$. ■

Bemerkung: Bei vielen Potentialproblemen ist die Größe

$$\Delta\Phi = \Delta_z\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy}$$

bekannt.

Frage: Wie verhält sich die Transformation Ψ unter dem Laplace-Operator Δ ?
D.h. welcher Werte ergibt sich für

$$\Delta\Psi = \Delta_w\Psi = \Psi_{uu} + \Psi_{vv} \quad ?$$

Anwendung des Laplace-Operators.

Mit erneuter Anwendung der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}\Phi_{xx} &= \Psi_{uu}(u_x)^2 + 2\Psi_{uv}u_xv_x + \Psi_{vv}(v_x)^2 + \Psi_u u_{xx} + \Psi_v v_{xx} \\ \Phi_{yy} &= \Psi_{uu}(u_y)^2 + 2\Psi_{uv}u_yv_y + \Psi_{vv}(v_y)^2 + \Psi_u u_{yy} + \Psi_v v_{yy}.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt durch Addition

$$\begin{aligned}\Delta_z \Phi &= \Psi_{uu} [(u_x)^2 + (u_y)^2] + 2\Psi_{uv} [u_xv_x + u_yv_y] \\ &\quad + \Psi_{vv} [(v_x)^2 + (v_y)^2] + \Psi_u \Delta_z u + \Psi_v \Delta_z v.\end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, liefern

$$\Delta_z \Phi = (\Psi_{uu} + \Psi_{vv})|f'(z)|^2 + \Psi_u \Delta_z u + \Psi_v \Delta_z v$$

wobei $|f'(z)|^2 = (u_x(z))^2 + (v_x(z))^2$ verwendet wurde.

Zweiter Transformationsatz.

Satz: Geht Ψ aus Φ durch konforme Transformation mit der Abbildung f hervor, so gilt

$$\Delta_z \Phi = \Delta_w \Psi \cdot |f'(z)|^2$$

wobei $w = f(z)$.

Beweis: Es gilt

$$\Delta_z \Phi = (\Psi_{uu} + \Psi_{vv})|f'(z)|^2 + \Psi_u \Delta_z u + \Psi_v \Delta_z v,$$

und weiterhin folgt

$$u_{xx} = v_{yx} \quad \text{und} \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, somit

$$\Delta_z u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

und analog gilt $\Delta_z v = 0$. Insgesamt bekommt man somit die Behauptung. ■

Harmonische Funktionen.

Folgerung: Genügt Φ der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$, so folgt $\Delta\Psi = 0$.

Beweis: Mit der Konformität von f folgt $f'(z) \neq 0$. Daraus bekommt man die Behauptung direkt mit der Identität $\Delta_z\Phi = \Delta_w\Psi \cdot |f'(z)|^2$. ■

Definition: Eine Funktion f , die in einem Gebiet G der Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ genügt, nennt man **harmonisch** in G . □

Somit können wir die obige Folgerung entsprechend umformulieren.

Folgerung: Bei konformer Transformation gehen harmonische Funktionen in harmonische Funktionen über. □

Wie bereits mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gezeigt, gilt

Satz: Falls $f = u + iv$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, analytisch auf einem Gebiet G , so gilt

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{auf } G \quad \text{und} \quad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{auf } G$$

d.h. Real- und Imaginärteil von f sind jeweils harmonisch auf G .

Beweis: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0$. Analog $\Delta v = 0$. ■

Existenz der konjugiert harmonischen Funktion.

Es gilt die folgende Umkehrung des vorigen Satzes.

Satz: Ist $u \equiv u(x, y)$ auf einem Gebiet G harmonisch, $\Delta u = 0$ in G , so gibt es eine Funktion $v \equiv v(x, y)$, so dass die Abbildung $f = u + iv$ auf G analytisch ist.

Beweis: Sei $u \equiv u(x, y)$ mit $\Delta u = 0$ in G . Somit suchen wir $v \equiv v(x, y)$ mit

$$v_x = -u_y \quad \text{und} \quad v_y = u_x,$$

so dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind, woraus folgen würde

$$\text{grad}(v) = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x) = V = (V_1, V_2)$$

Somit suchen wir ein **Potential** v mit $\text{grad}(v) = V$. Mit der

Integrabilitätsbedingung

$$\text{rot}(V) = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0$$

ist die Existenz eines solchen Potentials gesichert (vgl. Analysis III). ■

Skizze zur Lösung ebener Potentialprobleme.

Hilfsmittel: Transformationssätze.

Vorgehensweise: Konforme Transformation.

- **Gegeben:**

Potentialproblem in der z -Ebene, der *physikalischen Ebene*.

- **Transformation:**

Transformiere das Problem konform in die w -Ebene, die *Modellebene*.

- **Vereinfachung:**

Löse das Problem (*leicht?*) in der Modellebene.

- **Lösung:**

Rücktransformation in z -Ebene liefert Lösung in der physikalischen Ebene.

Temperaturverteilung in homogenem Zylinder.

Gegeben:

ein homogener Zylinder senkrecht zur z -Ebene mit beliebigem Querschnitt Q .

- Die Oberflächentemperatur des Zylinders sei *zeitunabhängig*.
- Die Oberflächentemperatur sei *konstant* bei konstantem z .

Frage: Wie sieht die Temperaturverteilung im Inneren des Zylinders aus?

- dabei werde am Rand die Temperatur $\Phi_0(z)$, $z \in \Gamma$, gemessen.

Modellierung: Die Temperatur Φ genügt nach der Wärmeleitungsgleichung der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{in } G.$$

Zusätzlich gelten die **Dirichlet-Randbedingungen**

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) \quad \text{für alle } z \in \Gamma.$$

Mathematische Aufgabenstellung: Löse das obige **Dirichlet-Problem**.

Annahme: Das Problem **gut gestellt**, d.h. es gibt eine eindeutige Lösung.

Vereinfachung des Dirichlet-Problems.

- **Ziel:** Bilde das Gebiet G eindeutig und konform auf den Einheitskreis ab.
- **Bemerkung:** Unter geeigneten Bedingungen ist dies mit einer analytischen Funktion f möglich, so dass

$$\Psi(w) = \Phi(f^{-1}(w)) \quad \text{für } |w| \leq 1$$

die *transformierte* Temperatur liefert.

- Im Inneren des Einheitskreises erfüllt Ψ somit die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{für } |w| < 1.$$

- Weiterhin nimmt Ψ auf dem Kreisrand die transformierten Randwerte an:

$$\Psi(e^{i\theta}) = \Psi_0(e^{i\theta}) = \Phi_0(f^{-1}(e^{i\theta})) \quad \text{für } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

- **Einfachere Aufgabe:** Löse das Dirichlet-Problem für Ψ auf dem Einheitskreis.

Lösung des einfacheren Dirichlet-Problems.

- **Voraussetzung:** Sei Ψ_0 hinreichend *glatt*, und durch

$$\Psi_0(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt, mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_0(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

- Dann kann die Lösung des Dirichlet-Problems direkt angegeben werden mit

$$\Psi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^{|n|} e^{in\theta} \quad \text{für } w = \rho e^{i\theta} \text{ mit } 0 \leq \rho \leq 1.$$

- **Rücktransformation:** Die Lösung des ursprünglichen Problems ist somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n |f(z)|^{|n|} e^{in\phi} \quad \text{mit } \phi = \arg(f(z)). \quad \square$$

5.2 Ebene stationäre Strömungen von Flüssigkeiten

Betrachten:

- zeitunabhängige ebene Strömungen von
- *idealen* (d.h. reibungsfeien) und *inkompressiblen* Flüssigkeiten;
- die Strömungen seien *quellenfrei* und *wirbelfrei*;
- dabei bezeichne

$$\mathbf{q}(x, y) = (q_1(x, y), q_2(x, y))$$

den Geschwindigkeitsvektor der Strömungen im Punkt (x, y) .

- **Quellenfreiheit** bedeutet

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}) = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0.$$

- **Wirbelfreiheit** bedeutet

$$\operatorname{rot}(\mathbf{q}) = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0.$$

Zur Existenz von Potentialströmungen.

Analysis III: Mit der Wirbelfreiheit $\operatorname{rot}(\mathbf{q}) = 0$ ist das Differential

$$q_1(x, y)dx + q_2(x, y)dy$$

integrabel, d.h. es gibt eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{q} = \operatorname{grad}(\Phi)$$

bzw.

$$q_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Definition: Die Funktion Φ mit $\mathbf{q} = \operatorname{grad}(\Phi)$ heißt **Potentialströmung** bzw. das **Geschwindigkeitspotential** der Strömung. □

Erinnerung: Eine Potentialströmung ist stets wirbelfrei, denn $\operatorname{rot}(\mathbf{q}) = 0$ folgt unmittelbar aus $\mathbf{q} = \operatorname{grad}(\Phi)$. □

Zur Quellenfreiheit von wirbelfreien Potentialen.

Beobachtung: Verwendet man die Bedingung (an die Wirbelfreiheit von \mathbf{q})

$$q_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

so gilt für die Quellenfreiheit, $\operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0$, die Bedingung

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Zusammenfassung: Das Geschwindigkeitspotential Φ einer quellen- und wirbelfreien Strömung einer idealen kompressiblen Flüssigkeit ist harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta \Phi = 0.$$

Umkehrung: Jede harmonische Funktion Φ , $\Delta \Phi = 0$, lässt sich als Geschwindigkeitspotential einer quellen- und wirbelfreien Strömung interpretieren. □

Neumannsches Randwertproblem.

Voraussetzungen:

- Sei Γ der Rand des durchströmten Gebiets G (begrenzende Wand);
- die Strömung verläuft dann tangential zum Rand Γ , d.h.
- der Geschwindigkeitsvektor $\operatorname{grad}(\Phi)$ ist der Tangentenvektor von Γ ;
- dann verschwindet die **Normalenableitung** von Φ längs Γ .
- Dies führt insgesamt zu dem **Neumannschen Randwertproblem**

$$\Delta(\Phi) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

das mit der Methode der konformen Transformation gelöst werden kann.

- Im folgenden entwickeln wir diesen Lösungsweg.

Lösung des Neumannschen Randwertproblems.

- Bilde G bijektiv und konform mit $f : G \rightarrow G^*$ auf *einfacheres* Gebiet G^* ab;
- Transformiere das Potential Φ von G nach G^* , womit

$$\Psi(w) = \Phi(f^{-1}(w)) \quad \text{für alle } w \in G^*.$$

- Nach dem zweiten Transformationssatz ist Ψ harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta\Psi = 0$$

- Falls f sogar auf dem Rand Γ von G konform ist, so gilt

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n^*} = 0$$

für die Normalenableitung des Randes Γ^* von G^* .

- Löse nun das *einfachere* Neumannsche Randwertproblem

$$\Delta\Psi = 0 \text{ in } G^* \quad \text{und} \quad \frac{\partial\Psi}{\partial n^*} = 0 \text{ auf } \Gamma^*$$

- Die Lösung in G bekommt man durch Rücktransformation. □

Strömung durch einen Kanal variabler Breite.

- **Physikalische Ebene:** ein Kanal G variabler Breite;
- **Modellebene:** ein gerader Kanal G^* ;
- Wirbelfreie Strömungen im geraden Kanal sind homogen mit Potential

$$\Psi(w) = V\operatorname{Re}(w)$$

wobei V der Betrag des (konstanten) Geschwindigkeitsvektors ist, der die Geschwindigkeit liefert.

- **Aufgabe:**

Bilde physikalischen Kanal inklusive Rand konform auf den geraden Kanal ab.

- Löse die Neumannsche Randwertaufgabe im geraden Kanal;
- Erhalte die Lösung im physikalischen Kanal durch Rücktransformation. □

Umströmung eines Hindernisses.

Voraussetzungen für die physikalische Ebene:

- homogene Strömung mit Geschwindigkeit V in Richtung der reellen Achse;
- umströmt werde ein zylindrisches Hindernis mit beschränktem Querschnitt;

Frage:

- Wie sieht das Strömungsbild der gestörten Strömung aus?

Beachte:

- die Strömung bleibt im Unendlichen ungestört und somit gilt

$$\text{grad}(\Phi(z)) \rightarrow V \quad \text{für } z \rightarrow \infty$$

für den Geschwindigkeitsvektor, kurz $\text{grad}(\Phi(\infty)) = V$.

Umströmung eines Hindernisses.

Vereinfachte Modellebene:

- Ist das Hindernis eine unendlich dünne Platte parallel zur reellen Achse, so wird die Strömung nicht gestört.
- in diesem Fall ist das Potential gegeben durch $\Psi(w) = V\text{Re}(w)$.
- **Problem:** Bilde das in der physikalischen Ebene durchströmte Gebiet auf aufgeschnittene Ebene $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ ab mit analytischer Funktion f , wobei

$$f(\infty) = \infty \quad \text{und} \quad f'(\infty) = 1.$$

- Dann gilt mit dem ersten Transformationsatz

$$\begin{aligned} \text{grad}(\Phi(z)) &= \text{grad}(\Psi(w)) \cdot \overline{f'(z)} \\ \text{grad}(\Phi(\infty)) &= \text{grad}(\Psi(\infty)) \quad \text{für } z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

so dass wir in der physikalischen Ebene und in der Modellebene dieselbe homogene Strömung im Unendlichen bekommen. □

Umströmung des Einheitskreiszylinders.

- Betrachte die Strömung um den Einheitskreiszylinder;
- Mit der gestreckten **Joukowski-Funktion**

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \quad \text{für } |z| > 1$$

geht das Äußere des Einheitskreises über in die aufgeschnittene Ebene

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ und } \operatorname{Re}(z) \in [-2, 2]\}$$

- dabei gilt $f(\infty) = \infty$ und $f'(\infty) = 1$.
- für das Potential in der physikalischen Ebene bekommt man somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = V \operatorname{Re} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

bzw.

$$\Phi(x, y) = V \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Umströmung des Einheitskreiszylinders.

- Mit $\operatorname{grad}(\Psi(w)) \equiv V$ und $f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$ erhalten wir

$$q(z) = \operatorname{grad}(\Phi(z)) = \operatorname{grad}(\Psi(f(z))) \cdot \overline{f'(z)} = V \left(1 - \frac{1}{\bar{z}^2} \right)$$

für den Geschwindigkeitsvektor bzw. in Polarkoordinaten

$$q(re^{i\phi}) = V \left(1 - \frac{1}{r^2} e^{2i\phi} \right)$$

- Speziell an der Zylinderoberfläche bekommen wir das Geschwindigkeitsfeld

$$q(e^{i\phi}) = V(1 - e^{2i\phi})$$

mit Geschwindigkeit

$$|q(e^{i\phi})| = V|1 - e^{2i\phi}| = 2V|\sin(\phi)|$$

- Für $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ ist die Geschwindigkeit Null (**Staupunkte**);
- Für $\phi = \pm\pi/2$ ist die Geschwindigkeit maximal, nämlich $2V$. □

6 Komplexe Integration

Ziel: Berechne für komplexe Funktion $f : D \rightarrow W \subset \mathbb{C}$ Integral der Form

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = ?$$

wobei $\Gamma \subset D \subset \mathbb{C}$ ein Weg im Definitionsbereich von f .

Fragen:

- Wie ist ein solches **komplexes Integral** sinnvollerweise zu definieren?
- Wie sind komplexe Integrale der obigen Form *einfach* zu berechnen?
- Für welche Funktionen f kann man das Integral *einfach* bestimmen?
- Wie hängt der Wert des komplexen Integrals vom Weg Γ ab?
- Kann man eine komplexe Funktion mittels komplexer Integration darstellen?

6.1 Definition und Berechnung komplexer Integrale

Ausgangspunkt:

- Sei $f : D \rightarrow W$ eine komplexe Funktion mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$;
- Sei $\Gamma \subset D$ eine beschränkte **orientierte Kurve** mit **Parametrisierung**

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \in D \quad t \in [\alpha, \beta]$$

wobei $z(\alpha)$ Anfangspunkt und $z(\beta)$ Endpunkt der Kurve Γ .

- Nun zerlegen wir Γ in n Teilkurven, jeweils durch Anfangs- und Endpunkte

$$z_0 = z(t_0), z_1 = z(t_1), z_2 = z(t_2), \dots, z_{n-1} = z(t_{n-1}), z_n = z(t_n),$$

definiert, wobei $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$.

- Mit $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $0 \leq k \leq n-1$, bilden wir die Partialsumme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k \quad \text{für } \zeta_k \in \Gamma|_{[z_k, z_{k+1}]}$$

Definition komplexer Kurvenintegrale.

- Nun verfeinern wir die Zerlegung, so dass $\max_{0 \leq k < n} |\Delta z_k| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.
- Betrachte die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$

Definition: Falls für jede Zerlegungsfolge z_0, \dots, z_n für Γ mit

$$\max_{0 \leq k < n} |\Delta z_k| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und für jede Wahl von Zwischenpunkten $\zeta_k \in \Gamma|_{[z_k, z_{k+1}]}$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ der Partialsummen S_n jeweils existiert und stets denselben Wert ergibt, so wird der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k =: \int_{\Gamma} f(z) dz$$

als das **Integral der Funktion f längs der Kurve Γ** bezeichnet. In diesem Fall spricht man von einem **komplexen Kurvenintegral**, f heißt **Integrand** und Γ heißt **Integrationsweg**. □

Bemerkungen zu komplexen Kurvenintegralen.

- Ist f reellwertig auf der reellen Achse und ist $\Gamma = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall der reellen Achse, so stimmt das komplexe Kurvenintegral mit dem entsprechenden Riemannschen Integral überein:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

- Das komplexe Kurvenintegral existiert unter den folgenden Bedingungen.
 - (a) f ist stückweise stetig längs Γ ;
 - (b) Γ besitzt eine Parametrisierung $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, die stückweise stetig differenzierbar ist, so dass $z'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$.

Geometrische Interpretation von (b):

Die Tangente der Kurve Γ variiert stetig längs Γ bis auf endlich viele **Knickstellen**, d.h. Γ ist stückweise glatt.

- Im folgenden setzen wir die Bedingungen (a) und (b) stets voraus.

Beispiel. Wir berechnen das Integral $\int_{\Gamma} z \, dz$, wobei

- Γ der **im positiven Sinn** einmal durchlaufene Einheitskreisrand.
- Verwenden mit $q = e^{2\pi i/n}$ die $n + 1$ Punkte

$$z_k = q^k \quad 0 \leq k \leq n$$

zur Zerlegung von Γ sowie die Zwischenpunkte $\zeta_k = z_k$.

- Für die n -te Partialsumme bekommen wir

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_k (z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} q^k (q^{k+1} - q^k) \\ &= (q - 1) \sum_{k=0}^{n-1} q^{2k} = (q - 1) \sum_{k=0}^{n-1} (q^2)^k \end{aligned}$$

und somit

$$S_n = (q - 1) \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} = \frac{q^{2n} - 1}{q + 1}$$

Wegen $q^{2n} = e^{4\pi i} = 1$ folgt $S_n = 0$ für alle n und somit $\int_{\Gamma} z \, dz = 0$. \square

Noch ein Beispiel. Wir berechnen nun das Integral $\int_{\Gamma} \bar{z} \, dz$, wobei

- Γ erneut der im positiven Sinn einmal durchlaufene Einheitskreisrand.
- Mit der gleichen Zerlegung und den gleichen Zwischenpunkten bekommen wir

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{q}^k (q^{k+1} - q^k)$$

für die Partialsummen. Mit $\bar{q} = e^{-2\pi i/n} = 1/q$ folgt somit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q - 1) = n(q - 1) = n(e^{2\pi i/n} - 1).$$

Mit der Substitution $\ell = 2\pi i/n$ berechnen wir nun den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{2\pi i/n} - 1) = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{2\pi i}{\ell} (e^{\ell} - 1) = 2\pi i \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{e^{\ell} - 1}{\ell} = 2\pi i.$$

Somit gilt

$$\int_{\Gamma} \bar{z} \, dz = 2\pi i.$$

Ein weiteres Beispiel.

Wir berechnen nun das Integral

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz$$

wobei Γ wieder der im positiven Sinn einmal durchlaufene Einheitskreisrand.

Beachte, dass für jeden Punkt z auf dem Einheitskreisrand gilt

$$\bar{z} = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = 1.$$

Somit bekommen wir unter Verwendung des vorigen Beispiels

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\Gamma} \bar{z} dz = 2\pi i.$$

□

Zur einfacheren Berechnung komplexer Integrale.

Ziel: Reduziere Berechnung eines komplexen Integrals auf zwei reelle Integrale.

Start: Sei $f : D \rightarrow W$ eine stetige komplexe Funktion. Der Integrationsweg Γ besitze Parametrisierung

$$\Gamma : t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta$$

Weiterhin: Zerlegung des Parameterintervalls $[\alpha, \beta]$ mit Parametern

$$t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

liefert entsprechende Zerlegung von Γ mit Teilpunkten

$$z_0 = z(t_0), z_1 = z(t_1), \dots, z_{n-1} = z(t_{n-1}), z_n = z(t_n).$$

Setze

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k \quad \text{und} \quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$$

für $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Zur einfacheren Berechnung komplexer Integrale.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta z_k = z_{k+1} - z_k &= z(t_{k+1}) - z(t_k) \\
 &= [x(t_{k+1}) - x(t_k)] + i[y(t_{k+1}) - y(t_k)] \\
 &= [x'(t_k) + iy'(t_k)]\Delta t_k + \Phi_k \\
 &= z'(t_k)\Delta t_k + \Phi_k
 \end{aligned}$$

mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi_k}{\Delta t_k} = 0$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Mit den Zwischenpunkten $\zeta_k = z(t_k) = z_k$ bekommen wir

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(z(t_k))[z'(t_k)\Delta t_k + \Phi_k]$$

für die n -ten Partialsummen mit Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) dt.$$

Rezept zur Berechnung eines komplexen Integrals.

Aufgabe: Berechne komplexes Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} f(z) dz$$

Lösungsweg:

(a) Stelle den Integrationsweg Γ in Parameterform dar

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \quad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta$$

(b) Substituiere im Integral $z = z(t)$, somit $dz = z'(t) dt$;

(c) Ersetze den Integrationsweg Γ durch die reellen Grenzen α und β .

(d) Berechne das Integral

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) dt.$$

□

Beispiel.

Wir berechnen nun erneut das Integral

$$\int_{\Gamma} z \, dz$$

über den im positiven Sinn einmal durchlaufenen Einheitskreisrand Γ .

- Wähle als Parametrisierung

$$\Gamma : t \mapsto z(t) = e^{it} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

- Dann gilt $dz = z'(t)dt = ie^{it}dt$ und somit

$$\int_{\Gamma} z \, dz = \int_0^{2\pi} e^{it} ie^{it} \, dt = i \int_0^{2\pi} e^{2it} \, dt = \frac{1}{2} e^{2it} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (e^{4\pi i} - e^0) = 0$$

□

Weitere Beispiele.

Wir berechnen nun erneut die Integrale

$$\int_{\Gamma} \bar{z} \, dz \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma} \frac{1}{z} \, dz$$

jeweils über den im positiven Sinn einmal durchlaufenen Einheitskreisrand Γ .

Mit der gleichen Parametrisierung wie im vorigen Beispiel ergibt sich für das erste Integral

$$\int_{\Gamma} \bar{z} \, dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it} \, dt = i \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi i$$

und für das zweite Integral bekommt man entsprechend den Wert

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} \, dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it} \, dt = i \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi i.$$

□

Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals.

- **Additivität bezüglich des Integranden.**

Für zwei komplexe Funktionen f und g gilt

$$\int_{\Gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\Gamma} g(z) dz.$$

- **Homogenität bezüglich des Integranden.**

Für eine komplexe Funktionen f und eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{\Gamma} cf(z) dz = c \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

- **Additivität bezüglich des Integrationsweges.** Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven, wobei der Endpunkt von Γ_1 mit dem Anfangspunkt von Γ_2 übereinstimmt. Dann gilt für die zusammengesetzte Kurve $\Gamma_1 + \Gamma_2$

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Weitere Eigenschaften des komplexen Integrals.

- **Homogenität bezüglich des Integrationsweges.**

Sei $-\Gamma$ die zu Γ in entgegengesetzter Richtung durchlaufene Kurve. Dann gilt

$$\int_{-\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

- **Obere Schranke für den Betrag des Integrals.**

Sei L die Länge der Kurve Γ . Dann gilt die **Standardabschätzung**

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq L \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$$

Beweis: Mit $M = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$ gilt die Abschätzung

$$|S_n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k| \leq ML$$

für die n -te Partialsumme und somit $|S_n| \leq ML$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung. ■

6.2 Integrale analytischer Funktionen

Grundvoraussetzung:

- $f : D \rightarrow W$ sei **analytisch**.

Weitere Voraussetzung:

- Das Definitionsgebiet D von f sei offen und **einfach zusammenhängend**.

Weitere Begriffe:

- Der Integrationsweg Γ heißt **geschlossen**, falls Anfangs- und Endpunkt von Γ übereinstimmen.
- Γ heißt **einfach geschlossen**, falls die Kurve Γ keine Schnittpunkte besitzt, d.h. für alle Parameter $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$, einer beliebigen Parametrisierung

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \quad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta \quad \text{wobei } \alpha < \beta$$

von Γ gilt $z(t_1) \neq z(t_2)$, für alle $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$,

d.h. $z(t)$ ist injektiv auf (α, β) . □

Der Cauchysche Integralsatz.

Satz (Cauchyscher Integralsatz):

Sei f analytisch auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G . Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 0,$$

d.h. das Integral von f längs jeder geschlossenen Kurve in G ist Null.

Beweis: Sei $\Gamma \subset G$ geschlossen mit Parametrisierung

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \quad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta$$

Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) \, dt.$$

Beweis des Cauchyschen Integralsatzes.

Mit den üblichen Darstellungen

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{und} \quad f(z) = u(z) + iv(z)$$

erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} [u(z(t)) + iv(z(t))][x'(t) + iy'(t)] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)] dt \\ &\quad + i \int_{\alpha}^{\beta} [v(z(t))x'(t) + u(z(t))y'(t)] dt \end{aligned}$$

bzw. es gilt die Darstellung

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\Gamma} (v dx + u dy),$$

des komplexen Kurvenintegrals durch zwei reelle Kurvenintegrale.

Fortsetzung des Beweises.

Im folgenden zeigen wir, dass die reellen Kurvenintegrale jeweils verschwinden.

O.E. nehmen wir Γ dabei als einfach geschlossen und positiv orientiert an.

Mit dem Greenschen Satz (Analysis III) gilt für das ebene Vektorfeld $\mathbf{p} = (u, -v)$

$$\int_{\Gamma} (u dx - v dy) = \int_{\Omega} \text{rot}(\mathbf{p}) dx dy$$

wobei Ω das von Γ eingeschlossene Gebiet bezeichnet, d.h. $\partial\Omega = \Gamma$, und wobei

$$\text{rot}(\mathbf{p}) = \frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -v_x - u_y.$$

Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, insbesondere $u_y = -v_x$, verschwindet die Rotation von \mathbf{p} , d.h. es gilt $\text{rot}(\mathbf{p}) = 0$, und somit

$$\int_{\Gamma} (u dx - v dy) = \int_{\Omega} \text{rot}(\mathbf{p}) dx dy = 0.$$

Analog zeigt man, dass $\int_{\Gamma} (v dx + u dy) = 0$; somit insgesamt $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$. ■

Beispiele. Γ umlaufe den Einheitskreisrand einmal im positiven Sinn.

Beispiel 1: $f(z) = z$ ist analytisch auf ganz \mathbb{C} . Somit ist der Cauchysche Integralsatz anwendbar und es gilt

$$\int_{\Gamma} z \, dz = 0.$$

Beispiel 2: Für $f(z) = \bar{z}$ ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar, denn f ist in keinem Gebiet analytisch. Es gilt

$$\int_{\Gamma} \bar{z} \, dz = 2\pi i.$$

Beispiel 3: Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist analytisch in dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Allerdings ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend und somit ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar. Es gilt

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} \, dz = 2\pi i.$$

□

Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz.

Voraussetzungen:

- f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G ;
- $\Gamma, \Gamma_1 \subset G$ zwei Wege mit gleichem Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1 ;

Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz: Es gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \int_{\Gamma_1} f(z) \, dz$$

wegen

$$\int_{\Gamma - \Gamma_1} f(z) \, dz = 0.$$

Fazit: Das Integral

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz =: \int_{z_0}^{z_1} f(z) \, dz$$

hängt nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges Γ ab.

Zur Konstruktion von Stammfunktionen.

Ausgangspunkt: Betrachte für festes $z_0 \in G$ und analytisches f die Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \quad \text{für } z \in G.$$

Behauptung: Die Funktion F_{z_0} ist analytisch und es gilt

$$F'_{z_0}(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in G.$$

Beweis: Für den Differenzenquotient von F_{z_0} bei z gilt

$$\begin{aligned} d(\ell) &= \frac{F_{z_0}(z + \ell) - F_{z_0}(z)}{\ell} = \frac{1}{\ell} \left(\int_{z_0}^{z+\ell} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{\ell} \int_z^{z+\ell} f(\zeta) d\zeta = \int_0^1 f(z + \ell t) dt \end{aligned}$$

und somit

$$f(z) = \lim_{\ell \rightarrow 0} d(\ell) = F'_{z_0}(z).$$

■

Hauptsatz der komplexen Integralrechnung.

Satz (Hauptsatz der komplexen Integralrechnung):

Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei $z_0 \in G$.

Dann ist die Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \quad \text{für } z \in G$$

analytisch und es gilt $F'_{z_0} = f$ auf G . ■

Definition: Sei F eine analytische Funktion auf einem Gebiet G mit $F' = f$.

Dann heißt F **Stammfunktion** von f auf G . □

Fazit: Die obige Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \quad \text{für } z \in G$$

ist eine Stammfunktion von f auf G . □

Berechnung des Integrals.

Betrachte für $z_0, z_1 \in G$ das Integral

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$$

wobei f analytisch auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G .

Weiterhin sei F eine beliebige Stammfunktion von f auf G .

Dann gilt $F' = F'_{z_0}$ und somit

$$F_{z_0}(z) = F(z) + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$. Wegen $F_{z_0}(z_0) = 0$ gilt $c = -F(z_0)$ und somit

$$F_{z_0}(z) = F(z) - F(z_0).$$

Daraus folgt schließlich

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F_{z_0}(z_1) = F(z_1) - F(z_0).$$

Beispiel: Wir bestimmen für $a, b > 0$ das Integral

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2} dz$$

- unter Verwendung der Stammfunktion $f(z) = -1/z$;
- durch Integration längs der Strecke $z(t) = a + it$, $-b \leq t \leq b$;
- durch Integration längs des Kreisbogens $z(t) = \sqrt{a^2 + b^2} e^{it}$, $-\phi \leq t \leq \phi$.

Methode 1: Es gilt

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} \Big|_{a-ib}^{a+ib} = -\frac{1}{a+ib} + \frac{1}{a-ib} = \frac{2ib}{a^2 + b^2}.$$

Methode 2: Es gilt

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2} dz = i \int_{-b}^b \frac{1}{(a+it)^2} dt = -\frac{1}{a+it} \Big|_{-b}^b = \frac{2ib}{a^2 + b^2}.$$

Methode 3: Übung mit $\sin(\phi) = b/\sqrt{a^2 + b^2}$. □

6.3 Die Cauchysche Integralformel

Frage: Was ist mit Integralen für Gebiete G , die *nicht* einfach zusammenhängend sind, speziell Gebiete mit "Löchern"?

Beachte: Hier ist der Cauchysche Integralsatz *nicht* anwendbar!

Beispiel: Für den positiv orientierten Einheitskreisrand Γ gilt

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Hierbei ist $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beachte: Falls das von Γ umschlossene Gebiet jedoch komplett in G liegt, so ist der Cauchysche Integralsatz anwendbar, und es gilt

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 0.$$

Zweifach zusammenhängende Gebiete.

Ausgangssituation:

- Sei G ein **zweifach zusammenhängendes Gebiet**, d.h. G besitzt genau ein "Loch" L .
- Weiterhin seien Γ_1 und Γ_2 zwei positiv orientierte geschlossene Wege, die das Loch L einmal umlaufen.

Konstruktion:

- Verbinde nun Γ_1 und Γ_2 durch zwei weitere geschlossene Kurvenstücke Γ' und Γ'' , die in G liegen (siehe Skizze).

Cauchyscher Integralsatz: Für eine analytische Funktion f auf G gilt

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma''} f(z) dz = 0$$

und weiterhin

$$\int_{\Gamma'} f + \int_{\Gamma''} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{-\Gamma_2} f = \int_{\Gamma_1} f - \int_{\Gamma_2} f = 0.$$

Verallgemeinerung Cauchyscher Integralsatz.

Aus den vorigen Überlegungen folgt direkt

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

und somit gilt der folgende

Satz: (Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes):

Sei f analytisch in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet G mit Loch L .

Dann besitzt das Integral

$$\int_{\Gamma} f(z) dz$$

längs jeder geschlossenen Kurve in G , die das Loch L einmal im positiven Sinne umläuft, denselben Wert. \square

Beispiel: Für jeden geschlossenen Weg Γ , der den Ursprung einmal im positiven Sinn umläuft, gilt

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Zurück zu einfach zusammenhängenden Gebieten.

Voraussetzungen:

- Sei G nun wieder ein *einfach* zusammenhängendes Gebiet.
- Γ sei eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve in G .
- $a \in G$ sei ein Punkt, der von Γ umlaufen wird (siehe Skizze).
- f sei eine analytische Funktion auf G .

Beobachtung: Die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - a}$$

ist analytisch in dem *zweifach* zusammenhängenden Gebiet $G' = G \setminus \{a\}$.

Somit gilt mit der Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z - a} dz,$$

wobei $\Gamma_r \subset G'$ der positiv durchlaufene Rand des Kreises um a mit Radius r .

Zur weiteren Konstruktion.

Mit der Parametrisierung

$$\Gamma_r : t \mapsto z(t) = a + re^{it} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

und mit $dz = ire^{it} dt$ bekommen wir die Darstellung

$$\int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{re^{it}} re^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$$

bzw.

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$$

Mit $r \rightarrow 0$ folgt daraus

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) \quad \text{bzw.} \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

□

Die Cauchysche Integralformel.

Satz: Sei f eine analytische Funktion in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G . Weiterhin sei Γ eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve in G . Dann gilt für jeden Punkt $a \in G$, der von Γ umlaufen wird, die **Cauchysche Integralformel**

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

□

Interpretation:

Die Werte einer analytischen Funktion $f(z)$ sind für alle Argumente $z \in G$, die von $\Gamma \subset G$ umlaufen werden, vollständig durch die Werte von f auf Γ bestimmt.

Konsequenz 1:

Falls f im Inneren des von Γ umlaufenden Gebietes abgeändert wird, aber nicht auf Γ geändert wird, so ist die daraus resultierende Funktion \tilde{f} nicht analytisch.

Konsequenz 2: Stimmen zwei analytische Funktionen f und g auf Γ überein, so stimmen f und g auf dem von Γ umschlossenen Gebiet überein, d.h. $f \equiv g$.

6.4 Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

Satz (Mittelwerteigenschaft): Der Wert einer analytischen Funktion f im Mittelpunkt einer in ihrem Definitionsbereich enthaltenen Kreisscheibe stimmt mit dem Mittelwert von f auf dem Kreisrand überein.

Beweis: Sei f analytisch auf G , $a \in G$, und sei Γ ein in G enthaltener positiv orientierter Kreisrand um a mit Radius r , der a einmal umläuft. Dann gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

bzw. (wie bereits mit der Parametrisierung $z(t) = a + re^{it}$ hergeleitet)

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Die rechte Seite beschreibt den **Mittelwert** von f auf Γ . ■

Maximumprinzip.

Satz (Maximumprinzip): Sei f eine analytische Funktion auf einem Gebiet G . Falls es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt mit

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \text{für alle } z \in G,$$

so ist f auf G konstant.

Beweisskizze: Sei $z_0 \in G$ maximal mit $M := |f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in G$. Dann gilt mit der Mittelwerteigenschaft die Darstellung

$$M = |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right|$$

und somit

$$M \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M dt = M$$

Fortsetzung der Beweisskizze.

Daraus folgt

$$|f(z_0 + re^{it})| = M \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dies bedeutet, dass $|f|$ auf jedem Kreis um z_0 , der in G liegt, konstant ist.

Da man das gesamte Gebiet G mit Kreisscheiben überdecken kann (Übung), gilt

$$|f| \equiv M$$

auf ganz G .

Unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt

$$f \equiv M$$

auf ganz G (Übung). □

Folgerungen aus dem Maximumprinzip.

Satz: Sei f eine analytische Funktion auf einem beschränkten Gebiet G . Sei weiterhin f stetig auf \overline{G} und nicht konstant. Dann nimmt die Funktion $|f(z)|$ ihren maximalen Wert nur auf dem Rand von G an.

Beweis: Angenommen, $|f|$ nimmt ihr Maximum im Inneren von G an. Dann ist f nach dem Maximumprinzip konstant. Dies widerspricht der Annahme. ■

Satz (Fundamentalsatz der Algebra): Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt mindestens eine Nullstelle in der komplexen Ebene.

Beweis: Für komplexe Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ sei

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

ein beliebiges Polynom vom Grad $n \geq 1$.

Angenommen, $p(z)$ besitzt keine komplexe Nullstelle, d.h. es gilt

$$p(z) \neq 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Fortsetzung des Beweises.

Dann ist die reziproke Funktion

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

analytisch auf ganz \mathbb{C} , und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0|} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n z^n|} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n} \right|} = 0. \end{aligned}$$

Demnach besitzt $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Maximum.

Nach dem Maximumprinzip ist f konstant. Somit ist p konstant.

Dies widerspricht der Annahme an den Grad von p . ■

Integraldarstellung der Ableitung.

Voraussetzungen:

- Sei f analytisch in G ;
- Γ eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve in G .
- das Innere G_Γ des von Γ umschlossenen Gebietes gehöre ganz zu G , $G_\Gamma \subset G$.

Cauchysche Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

Differentiation: Nun gilt

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

und somit

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

Integraldarstellung höherer Ableitungen.

Verallgemeinerung: Erneutes (wiederholtes) Differenzieren des Integranden,

$$\frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots,$$

liefert die Darstellung

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{für alle } z \in G_{\Gamma}$$

für die höheren Ableitungen $f^{(n)}$ von f für $n = 1, 2, 3, \dots$

Cauchysche Integralformel für die Ableitungen.

Satz (Cauchysche Integralformel für die Ableitungen): Sei f in einem Gebiet analytisch. Dann existieren alle Ableitungen von f in G , und diese Ableitungen sind jeweils analytisch in G . Weiterhin gilt für eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve $\Gamma \subset G$, deren Inneres G_{Γ} ganz in G liegt, die Cauchysche Integralformel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{für alle } z \in G_{\Gamma}$$

für die Ableitungen $f^{(n)}$ von f für $n = 1, 2, 3, \dots$ □

Bemerkungen:

- Für $n = 0$ liefert die obige Darstellung die Cauchysche Integralformel für f .

- Es gilt der Grundsatz: **„einmal holomorph, immer holomorph“** :

Eine analytische Funktion f lässt sich beliebig oft in ihrem Definitionsbereich G komplex differenzieren, d.h. ist f ist komplex differenzierbar in einem Gebiet G , so existieren alle Ableitungen $f^{(n)}$ von f in G für $n = 1, 2, 3, \dots$ □

6.5 Die Taylor-Reihe

Start: Erinnerung an den Satz über die geometrische Reihe.

- Für die *endliche* geometrische Reihe gilt die Summenformel

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

- Für $|q| < 1$ ist die *unendliche* geometrische Reihe konvergent mit Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1,$$

während die Reihe für $|q| \geq 1$ divergiert.

Zur Herleitung der Taylor-Reihe.

Vorbereitungen:

- Sei f analytisch im Gebiet G , $\Gamma \subset G$ einfach geschlossen und positiv orientiert.
- Dann gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für jedes $z \in G$, das von Γ umlaufen wird.

- Sei nun $a \in G$ ein Punkt, der von Γ umlaufen wird.
- Weiterhin bezeichne r den Abstand zwischen a und Γ , d.h.

$$r = \min_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - a|$$

- Schließlich sei z ein Punkt im offenen Kreis $B_r(a) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a| < r\}$ um den Punkt a mit Radius r , d.h. $z \in B_r(a)$. Insbesondere gilt

$$|z - a| < r.$$

Zur weiteren Herleitung der Taylor-Reihe.

- Es gilt die Zerlegung

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

- Wegen $|z - a| < r$ und $|\zeta - a| \geq r$ für $\zeta \in \Gamma$ gilt $|q| < 1$ für

$$q := \frac{z - a}{\zeta - a}.$$

- Daraus folgt die Darstellung

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{1 - q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n \quad \text{für } \zeta \in \Gamma$$

und weiterhin

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n d\zeta \quad \text{für } z \in B_r(a).$$

Zur weiteren Herleitung der Taylor-Reihe.

- Durch Vertauschen von Summation und Integration bekommen wir somit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad \text{für } z \in B_r(a).$$

- Wegen

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

gilt insgesamt die **Taylor-Reihendarstellung**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \quad \text{für } z \in B_r(a).$$

d.h. wir bekommen die **Taylor-Reihe** von f um den Entwicklungspunkt a

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (z - a) + \frac{f''(a)}{2!} (z - a)^2 + \dots$$

□

Bemerkungen zur Taylor-Reihe.

- Mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad \text{für } z \in B_r(a).$$

konvergiert die Taylor-Reihe in $B_r(a)$ und stellt dort f dar.

- Die Taylor-Reihe hängt nur von f und a , aber nicht von Γ ab.
- Daher hängt der Konvergenzbereich der Taylor-Reihe nur von f und a ab.

Satz: Die Funktion f sei analytisch im Gebiet G und a sei ein Punkt in G . Dann konvergiert die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n,$$

gegen $f(z)$ für alle z innerhalb des größten Kreises um a , dessen Inneres ganz in G enthalten ist, d.h. für alle $z \in B_r(a) \subset G$. □

Die Taylor-Reihe ist eindeutig.

Satz: Die Funktion f sei analytisch im Gebiet G und a sei ein Punkt in G . In einer Umgebung von a gelte für $f(z)$ die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit komplexen Konstanten $c_n \in \mathbb{C}$, für $n = 0, 1, 2, \dots$. Dann gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

d.h. die obige Reihe ist die Taylor-Reihe von f um a .

Beweis: Für $z = a$ gilt $f(a) = c_0$. Durch Differentiation von f erhält man

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} \quad \text{bzw.} \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}$$

und somit $f'(a) = c_1$ bzw. $f^{(n)}(a) = n! c_n$ für $z = a$, d.h. die Koeffizienten c_n stimmen mit den Koeffizienten der Taylor-Reihe überein. ■

Ein Beispiel.

Für die Exponentialfunktion gilt

$$\frac{d^n}{dz^n} \exp(z) = \exp(z) \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots,$$

und somit gilt

$$\left. \frac{d^n}{dz^n} \exp(z) \right|_{z=0} = 1 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Daher besitzt die Taylor-Reihe von $\exp(z)$ um $a = 0$ die Gestalt

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

- Die Exponentialfunktion ist in der ganzen komplexen Zahlenebene analytisch.
- Somit gilt die obige Darstellung für die Taylor-Reihe von $\exp(z)$ in ganz \mathbb{C} .

□

Noch zwei Beispiele.

- Für die Taylor-Reihe von $\exp(-z^2)$ um Null bekommen wir die Darstellung

$$\exp(-z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!} = 1 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} \pm \dots$$

in ganz \mathbb{C} .

- Die komplexe Sinusfunktion $\sin(z)$ besitzt die bekannte Reihen-Darstellung

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots$$

- Der komplexe Sinus ist auf ganz \mathbb{C} analytisch.
- Die obige Reihe ist die Taylor-Reihe von $\sin(z)$ um Null.
- Die Taylor-Reihe konvergiert auf ganz \mathbb{C} .

□

Und noch ein Beispiel.

- Wir entwickeln die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

um Null. Für $|z| < 1$ gilt die Darstellung

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \dots$$

- Dies ist bereits die Taylor-Reihe von $f(z)$ um Null.
- Die Taylor-Reihe konvergiert im Einheitskreis, d.h. für $|z| < 1$.
- **Begründung:** Die Funktion $f(z)$ ist analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, und der größte Kreis um Null, in dem f analytisch ist, ist der Einheitskreis. □

Die Cauchysche Koeffizientenabschätzungsformel.

Satz: Die Funktion f sei analytisch im Gebiet G . Die abgeschlossene Kreisscheibe $|z - a| \leq r$, $r > 0$, sei in G enthalten, und es sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = c_0 + c_1 (z - a) + c_2 (z - a)^2 + \dots$$

die Taylor-Reihe von f um a , also

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Weiterhin sei

$$M(r) = \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Dann gilt die **Cauchysche Koeffizientenabschätzungsformel**

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Interpretation: Die Werte $f^{(n)}(a)$ können nicht beliebig schnell anwachsen.

Beweis: Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Somit ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\max_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}} \right) 2\pi r \\ &= \frac{M(r)}{r^n} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

■

Der Satz von Liouville.

Satz (Satz von Liouville): Ist eine komplexe Funktion f in der ganzen komplexen Ebene analytisch und beschränkt, so ist f konstant auf ganz \mathbb{C} .

Beweis: Sei f analytisch auf ganz \mathbb{C} und beschränkt, d.h. es gibt ein M mit

$$|f(z)| \leq M \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt für $a \in \mathbb{C}$ mit der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungsformel

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$$

für beliebiges $r > 0$. Für $r \rightarrow \infty$ folgt daraus

$$f'(a) = 0.$$

Da a beliebig war, gilt $f' \equiv 0$ auf ganz \mathbb{C} , d.h. f ist konstant auf ganz \mathbb{C} . ■

6.6 Die Laurent-Reihe

- **Voraussetzung:** Sei f analytisch in zweifach zusammenhängendem Gebiet G .
- **Ziel:** Stelle f in G durch geeignete Reihen-Entwicklung dar.
- **Vereinfachung:**

Für $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ sei f analytisch im **Kreisring**

$$R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < r_2\} = B_{r_2}(a) \setminus \overline{B_{r_1}(a)}$$

wobei $B_r(a)$ der offene, $\overline{B_r(a)}$ der abgeschlossene Kreis um a mit Radius $r > 0$.

- Falls $r_1 = 0$, so gilt $R_0^{r_2}(a) = B_{r_2}(a) \setminus \{a\}$;
- Falls $r_2 = \infty$, so gilt $R_{r_1}^{\infty}(a) = \mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_1}(a)}$.

Beachte:

- f kann nicht nach ganzen positiven Potenzen von $z - a$ in R entwickelt werden.
- Denn ansonsten wäre f analytisch in ganz $B_{r_2}(a)$.

Die Laurent-Reihenentwicklung.

Satz: Die Funktion f sei analytisch im Kreisring $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$, und es sei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

wobei $\Gamma \subset R$ eine beliebige Kurve ist, die $B_{r_1}(a)$ einmal im positiven Sinne umläuft. Dann gilt die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad \text{für alle } z \in R.$$

Definition: Die obige Reihe heißt **Laurent-Reihe** von f in R .

Weiterhin heißt a das **Entwicklungszentrum** der Laurent-Reihe. \square

Beachte: Die Laurent-Reihe enthält positive und negative Potenzen von $z - a$.

Bemerkungen zu Laurent-Reihenentwicklungen.

- Falls f in ganz $B_{r_2}(a)$ analytisch ist, so gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 0 \quad \text{für } n = -1, -2, -3, \dots$$

In diesem Fall enthält die Laurent-Reihe keine negativen Potenzen von $z - a$ und stimmt daher mit der Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{für alle } z \in B_{r_2}(a).$$

überein. Insbesondere gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

- Die Werte der Laurent-Koeffizienten c_n sind unabhängig von Γ .

Ein Lemma.

Lemma: Die Funktion f sei analytisch im Kreisring $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$. Weiterhin sei $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für alle } \rho_1 < |z - a| < \rho_2,$$

wobei Γ_1 der innere und Γ_2 der äußere Kreisrand von $R_{\rho_1}^{\rho_2}$ ist.

Beweis: Sei $z \in R_{\rho_1}^{\rho_2}$. Dann gilt (siehe Skizze)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Wegen $\Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma_2 - \Gamma_1$ folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$



Beweis vom Satz der Laurent-Reihenentwicklung.

Beweis: Sei $z \in \mathbb{R}$. Für $\zeta \in \Gamma_2$ gilt $|\zeta - a| > |z - a|$ und somit

$$\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < 1 \quad \text{für } \zeta \in \Gamma_2.$$

Damit bekommen wir

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n c_n. \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beweises.

Andererseits gilt $|\zeta - a| < |z - a|$ für $\zeta \in \Gamma_1$ und somit

$$\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| < 1 \quad \text{für } \zeta \in \Gamma_1.$$

Damit bekommen wir

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}} = -\frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^n$$

und somit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - a)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\zeta) (\zeta - a)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^{-n-1} c_{-n-1} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - a)^n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Die Laurent-Reihe ist eindeutig.

Satz (Eindeutigkeitssatz):

Eine in einem Kreisring $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, analytische Funktion f kann nur auf eine Weise in R durch eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

dargestellt werden, nämlich durch ihre Laurent-Reihe, wobei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

mit einem Weg Γ , der $\overline{B_{r_1}(a)}$ einmal im positiven Sinn umläuft.

Beweis: Angenommen es gibt eine weitere Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-a)^n \quad \text{für } z \in R.$$

Dann gilt

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z-a)^n \quad \text{mit } d_n = c_n - c'_n \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Sei nun $m \in \mathbb{Z}$ und $\Gamma \in R$ ein positiv orientierter Kreis um a .

Dann gilt (durch Multiplikation mit $(z-a)^{-m-1}$ und Integration längs Γ)

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \int_{\Gamma} (z-a)^{n-m-1} dz$$

Wegen

$$\int_{\Gamma} (z-a)^k dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } k = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt daraus $0 = d_m \cdot 2\pi i$ und somit $d_m = 0$, d.h. $c_m = c'_m$.

Da $m \in \mathbb{Z}$ beliebig war, sind die beiden Reihen identisch. ■

Beispiel.

Bestimme die Laurent-Reihe der Funktion $f(z) = \sin(z)/z^2$ im Kreisring R_0^∞ .

Es gilt

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots$$

und daher ist

$$\frac{\sin(z)}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} \pm \dots$$

die Laurent-Reihe von f mit Entwicklungszentrum $a = 0$. □

Noch ein Beispiel. Bestimme die Laurent-Reihe der Funktion

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

um den Entwicklungspunkt $a = 1$.

Es gilt

$$\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots$$

und daher mit $w = 1/(1-z)$,

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{1-z}\right) &= 1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{(1-z)^3} + \dots \\ &= 1 - \frac{(z-1)^{-1}}{1!} + \frac{(z-1)^{-2}}{2!} - \frac{(z-1)^{-3}}{3!} \pm \dots \end{aligned}$$

die Laurent-Reihe von f mit Entwicklungszentrum $a = 1$. □

Und noch ein Beispiel. Bestimme die Laurent-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

in R_0^1 und in R_1^∞ . In R_0^1 , d.h. für $|z| < 1$, gilt

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

und daher

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

für die Laurent-Reihe von f um $a = 0$ in R_0^1 . In R_1^∞ , d.h. $|z| > 1$, bekommen wir

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots$$

und somit

$$f(z) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots$$

für die Laurent-Reihe von f um $a = 0$ in R_1^∞ . □

6.7 Isolierte Singularitäten

Definition: Eine analytische Funktion f hat in einem Punkt $a \in \mathbb{C}$ eine **isolierte Singularität**, falls f in einem Kreisring

$$B_r(a) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\} \quad \text{für } r > 0,$$

definiert ist, aber nicht im Punkt a . □

Beispiele:

- $f(z) = \sin(z)/z$ besitzt in $z = 0$ eine isolierte Singularität.
- $f(z) = 1/(1+z^2)$ besitzt in $z = \pm i$ isolierte Singularitäten.
- $f(z) = \exp(1/(1-z))$ besitzt in $z = 1$ eine isolierte Singularität.
- Der komplexe Logarithmus $\text{Log}(z)$ ist in $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$ nicht definiert. Somit ist der Punkt $z = 0$ *keine* isolierte Singularität von $\text{Log}(z)$. □

Drei Typen isolierter Singularitäten.

Die Funktion f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität. Insbesondere ist f analytisch in $B_r(a) \setminus \{a\}$. Dann kann f in $B_r(a) \setminus \{a\}$ in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$$

entwickelt werden. Wir unterscheiden drei Typen von isolierten Singularitäten.

Definition: f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität. Dann heißt a

- eine **hebbare Singularität** von f , falls in der Laurent-Reihe alle Koeffizienten c_n mit $n < 0$ verschwinden;
- ein **Pol der Ordnung m** von f , falls in der Laurent-Reihe nur endlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind und $-m$ die kleinste Zahl ist mit $c_{-m} \neq 0$.
- eine **wesentliche Singularität** von f , falls in der Laurent-Reihe unendlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind. \square

Beispiel.

- Betrachte die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

- f besitzt eine isolierte Singularität in $z = 0$.
- Wir bestimmen nun die Laurent-Reihe von f um Null.
- Mit der Taylor-Reihe der Sinus-Funktion

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots$$

erhalten wir nach Division durch $z \neq 0$ die Laurent-Reihe

$$\frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} \pm \dots$$

- Somit ist $z = 0$ eine hebbare Singularität von f . \square

Noch ein Beispiel.

- Wir untersuchen die isolierte Singularität $z = i$ von

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

- Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z-i} \frac{1}{z-i+2i} \\ &= \frac{1}{z-i} \frac{1}{2i \left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)} = \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} \frac{1}{1 - \frac{i}{2}(z-i)} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} \left[1 + \frac{i}{2}(z-i) + \left(\frac{i}{2}\right)^2 (z-i)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2^2} (z-i)^0 + \frac{i}{2^3} (z-i) + \dots \end{aligned}$$

- Somit hat f in $z = i$ einen Pol erster Ordnung. □

Und noch ein Beispiel.

- Wir untersuchen die isolierte Singularität $z = 1$ der Funktion

$$f(z) = \exp(1/(1-z)).$$

- Die Laurent-Entwicklung

$$\exp(1/(1-z)) = 1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{(z-1)^3} + \dots$$

von f enthält unendlich viele Glieder mit negativen Potenzen von $z - 1$.

- Somit ist $z = 1$ eine wesentliche Singularität von f . □

Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich.

- Sei f eine rationale Funktion, d.h. mit Polynomen $p(z)$ und $q(z)$, gilt

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

- Dann besitzt f nur bei den Nullstellen von q isolierte Singularitäten.
- Sei z_0 Nullstelle der Ordnung m von $q(z)$, so dass

$$q(z) = (z - z_0)^m q_1(z)$$

für ein Polynom $q_1(z)$ mit $q_1(z_0) \neq 0$. Somit gilt

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{p(z)}{q_1(z)}$$

wobei $p(z)/q_1(z)$ um z_0 in eine Taylor-Reihe um z_0 entwickelt werden kann,

$$\frac{p(z)}{q_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich.

- Die Taylor-Reihe

$$\frac{p(z)}{q_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

konvergiert für ein $r > 0$ in dem Kreis $B_r(z_0)$ um z_0 .

- So bekommt man die Laurent-Reihe

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^m a_n (z - z_0)^{n-m} \\ &= \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m-2}} + \dots, \end{aligned}$$

die im Kreisring $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ konvergiert.

- Wie man an der Form der Laurent-Reihe sieht, ist z_0 entweder ein Pol oder eine hebbare Singularität von f , aber keine wesentliche Singularität. \square

Werteverhalten bei hebbaren Singularitäten.

Satz: Sei f analytisch im Kreisring $B_r(a) \setminus \{a\}$. Weiterhin sei a eine hebbare Singularität von f . Dann existiert der Grenzwert

$$\alpha := \lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

Definiert man $f(a) := \alpha$, so ist die derart erweiterte Funktion in der vollen Kreisscheibe $B_r(a)$ analytisch. □

Beweis: Mit der Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

bekommt man sofort den Grenzwert $\alpha = c_0 = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots - c_0}{z - a} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots}{z - a} = c_1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Der Satz von Riemann.

Es gilt die Umkehrung des vorigen Satzes, hier in seiner verschärften Form:

Satz (Satz von Riemann): Die Funktion f besitze in a eine isolierte Singularität. Falls f in einem Kreisring $B_r(a) \setminus \{a\}$ beschränkt ist, so ist a eine hebbare Singularität von f .

Beweis: Sei f beschränkt in $B_r(a) \setminus \{a\}$ mit $|f(z)| \leq M$. Für die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

verschwinden alle c_n mit $n < 0$, denn es gilt die Abschätzung

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{-n} \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Für $n < 0$ bekommt man für $\rho \rightarrow 0$ den Grenzwert Null.

Somit gilt $c_n = 0$ für alle $n < 0$. ■

Werteverhalten bei Polstellen.

Aus dem Satz von Riemann ziehen wir zunächst die

Folgerung: Ist eine isolierte Singularität a von f nicht hebbar, so ist f in keiner Umgebung von a beschränkt. \square

Satz: Hat die Funktion f in a einen Pol, so gilt

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

Beweis: Aus der Laurent-Entwicklung von f um a ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \frac{c_{-m+2}}{(z-a)^{m-2}} + \dots \\ &= \frac{1}{(z-a)^m} [c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + c_{-m+2}(z-a)^2 + \dots] \end{aligned}$$

mit $m > 0$ und $c_{-m} \neq 0$, folgt die Behauptung unmittelbar. \blacksquare

Beispiel. Betrachte die Funktion

$$f(z) = \exp(1/z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

- f besitzt in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.
- Für $z = x$, x reell und *positiv*, gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \exp(1/x) = \infty$$

- Für $z = x$, x reell und *negativ*, gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} \exp(1/x) = \lim_{x \searrow 0} \exp(-1/x) = 0$$

- Für $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, existiert der Grenzwert nicht:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \exp(1/z) = \lim_{y \rightarrow 0} \exp(1/(iy)) = \lim_{y \rightarrow 0} \exp(-i/y)$$

Der Satz von Casorati-Weierstrass.

Satz (Satz von Casorati-Weierstrass): Die Funktion f besitze im Punkt $a \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität. Dann kommen die Werte von f in jeder Umgebung von a jeder komplexen Zahl beliebig nahe.

Beweis durch Widerspruch: Sei $U = B_r(a) \setminus \{a\}$ eine Umgebung von a . Weiterhin sei $w_0 \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, der die Werte von f in U **nicht** beliebig nahe kommen, d.h. es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass

$$|f(z) - w_0| \geq \epsilon \quad \text{für alle } z \in U.$$

Dann ist die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \quad \text{für } z \in U$$

analytisch in U , und wegen $|g(z)| \leq 1/\epsilon$ beschränkt.

Beweis des Satzes von Casorati-Weierstrass.

Somit ist a eine hebbare Singularität von g , so dass in U die Darstellung

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} (z-a)^n = (z-a)^m g_1(z)$$

für $m \geq 0$ gilt, wobei $g_1(z)$ in $B_r(a)$ analytisch ist. Daraus folgt die Darstellung

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)} = w_0 + \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{g_1(z)} \quad \text{für } z \in U$$

für f in U . Zusammen mit der Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \text{für } z \in U$$

erhalten wir die Laurent-Reihe von f in U ,

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \dots + b_m + w_0 + b_{m+1}(z-a) + \dots,$$

im Widerspruch zur Annahme, wonach a wesentliche Singularität ist. ■

Der Hauptteil einer Laurent-Reihe.

Definition: Sei a eine isolierte Singularität der Funktion f , und es sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

die Laurent-Reihe von f um a . Dann heißt die Funktion

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n$$

der zu a gehörige **Hauptteil** von f . □

Bemerkungen:

- Für eine hebbare Singularität verschwindet der Hauptteil.
- Für einen Pol ist der Hauptteil ein Polynom in $1/(z - a)$.

Satz: Eine rationale Funktion f , die im Unendlichen verschwindet, ist die Summe ihrer Hauptteile, $f = h_1 + h_2 + \dots + h_N$.

Beweis: Sei f rational. Dann ist f in der komplexen Ebene bis auf endlich viele Polstellen $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ analytisch. Betrachte nun die zugehörigen Hauptteile

$$h_k(z) = \sum_{n=1}^{m_k} \frac{c_{kn}}{(z - z_k)^n} \quad \text{für } k = 1, \dots, N,$$

von f . Dann ist die Funktion $g = f - \sum_{k=1}^N h_k$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ analytisch.

Da nun für jedes z_k der zugehörige Hauptteil h_k in der Laurent-Reihe von g um z_k wegfällt, ist z_k eine hebbare Singularität von g , für $k = 1, \dots, N$.

Damit ist g eine ganze Funktion, d.h. g ist analytisch auf ganz \mathbb{C} .

Schließlich gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) - \sum_{k=1}^N \lim_{z \rightarrow \infty} h_k(z) = 0,$$

somit ist g beschränkt auf \mathbb{C} , nach dem Satz von Liouville konstant mit $g \equiv 0$. ■

6.8 Residuenkalkül

Erinnerung:

- Sei f analytisch auf einem zweifach zusammenhängenden Gebiet G , d.h. G besitzt genau ein "Loch" L .
- Weiterhin seien Γ und Γ_1 zwei positiv orientierte geschlossene Wege, die das Loch L einmal umlaufen.
- **Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes:** Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz.$$

- **Ziel:** Weitere Verallgemeinerung auf mehrere Löcher L_1, \dots, L_N .

Integrale in Gebieten mit zwei Löchern.

- Sei f analytisch in einem Gebiet G , das zwei disjunkte Löcher L_1 und L_2 hat.
- Sei $\Gamma \subset G$ eine positiv orientierte Kurve um L_1 und L_2 .
- Weiterhin seien $\Gamma', \Gamma'' \subset G$ zwei geschlossene Kurven mit $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$, wobei
 - ◊ Γ' das Loch L_1 einmal im positiven Sinne umläuft (aber nicht L_2 umläuft);
 - ◊ Γ'' das Loch L_2 einmal im positiven Sinne umläuft (aber nicht L_1 umläuft).
- Dann gilt für beliebige geschlossene Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$, die jeweils nur L_1 bzw. L_2 einmal im positiven Sinne umlaufen (siehe Skizze)

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma'} f(z) dz \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma''} f(z) dz$$

und weiterhin mit $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ die Formel

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

□

Integrale in Gebieten mit mehreren Löchern.

- Sei f analytisch in einem Gebiet G , das N disjunkte Löcher L_1, \dots, L_N hat.
- Sei $\Gamma \subset G$ eine positiv orientierte Randkurve um L_1, \dots, L_N .
- Weiterhin seien $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ geschlossene Kurven in G , wobei für $k = 1, \dots, N$
 - ◊ Γ_k das Loch L_k einmal im positiven Sinne umläuft;
 - ◊ Γ_k keines der anderen Löcher (außer L_k) umläuft.
- Dann gilt die Formel

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} f(z) dz.$$

Bemerkung: Die Formel gilt insbesondere für den Fall, bei dem die Löcher L_k jeweils zu einem Punkt $z_k \in G$ zusammenfallen, d.h. f besitzt isolierte Singularitäten in z_1, \dots, z_N . □

Zur Bedeutung des Laurent-Koeffizienten c_{-1} .

Erinnerung: Für die Koeffizienten der Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_k)^n \quad \text{für } 0 < |z - z_k| < r$$

von $f(z)$ um z_k gilt die Darstellung

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f(z)}{(z - z_k)^{n+1}} dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Insbesondere gilt die Formel

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} f(z) dz$$

bzw.

$$\int_{\Gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \cdot c_{-1}.$$

□

Das Residuum.

Definition: Die Funktion f besitze im Punkt a eine isolierte Singularität. Dann kann f in einer Umgebung von a durch eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{für } 0 < |z-a| < r$$

dargestellt werden. Der Koeffizient $c_{-1} \in \mathbb{C}$ wird als **Residuum** von f in a bezeichnet. Wir verwenden dafür die Notationen

$$\operatorname{Resf}(a) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Resf}(z)|_{z=a}.$$

□

Bemerkungen:

- Der Begriff des Residuums bezieht sich auf die Laurent-Reihe von f um a , die in der Umgebung $B_r(a) \setminus \{a\}$ gilt, **nicht** auf beliebigen Kreisringen $B_{r_1}^{r_2}(a)$.
- Insbesondere ist das Residuum von f in a eindeutig.
- Falls f analytisch in ganz $B_r(a)$, so gilt $\operatorname{Resf}(a) = 0$.

□

Der Residuensatz.

Satz (**Residuensatz**):

Die Funktion f sei bis auf endlich viele isolierte Singularitäten z_1, \dots, z_N in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G analytisch. Weiterhin sei $\Gamma \subset G$ eine positiv orientierte geschlossene Kurve, die alle Singularitäten einmal umläuft.

Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Resf}(z_k).$$

Bemerkung: Die Integral-Darstellung im Residuensatz erweitert man wie folgt.

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in G_{\Gamma}} \operatorname{Resf}(z)$$

denn es gilt $\operatorname{Resf}(z) = 0$ für alle $z \in G \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$. Insbesondere gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in G_{\Gamma}} \operatorname{Resf}(z) = 0$$

(der Cauchysche Integralsatz), falls f auf ganz G analytisch ist.

□

Residuenbestimmung in einem Pol erster Ordnung.

- Sei a Pol erster Ordnung von f .
- Dann besitzt f um a die Laurent-Reihendarstellung

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

- Somit gilt

$$(z-a)f(z) = c_{-1} + c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + c_2(z-a)^3 + \dots$$

in einer Umgebung von a . Für $z \rightarrow a$ bekommt man daraus

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

Satz: Die Funktion f besitze in $a \in \mathbb{C}$ einen Pol erster Ordnung. Dann gilt

$$\text{Res}f(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

□

Folgerung.

Voraussetzungen: Die Funktion f besitze die Form

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

wobei p und q analytische Funktionen seien.

Weiterhin besitze q in a eine einfache Nullstelle, d.h.

$$q(a) = 0 \quad \text{und} \quad q'(a) \neq 0.$$

Dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{p(z)}{\frac{q(z)-q(a)}{z-a}} = \frac{p(a)}{q'(a)}.$$

In diesem Fall ist a

- entweder ein Pol erster Ordnung von f (falls $p(a) \neq 0$);
- oder eine hebbare Singularität von f (falls $p(a) = 0$).

□

Zusammenfassung.

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

eine Funktion, wobei $p(z)$ und $q(z)$ in einer Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ analytisch seien. Weiterhin besitze q in a eine einfache Nullstelle. Falls $p(a) \neq 0$, so ist a ein Pol erster Ordnung von f mit Residuum

$$\text{Resf}(a) = \frac{p(a)}{q'(a)}.$$

Falls $p(a) = 0$, so ist a eine hebbare Singularität von f . □

Beispiel: Berechnen für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

das Residuum in $z = i$. Es gilt $f(z) = p(z)/q(z)$ mit $p(z) = 1, q(z) = 1 + z^2$,

$$\text{Resf}(i) = \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \frac{1}{2i}.$$

Anwendungen des Residuensatzes.

Beispiel 1: Wir berechnen das uneigentliche **reelle** Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Setze

$$I_R = \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx$$

für $R > 0$, so dass $I = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R$.

Wir schreiben das **reelle** Integral I_R als **komplexes** Integral

$$I_R = \int_{\Gamma'} f(z) dz$$

längs des Integrationsweges $\Gamma' = [-R, R] \subset \mathbb{C}$ über die analytische Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Fortsetzung des Beispiels.

- Sei Γ'' der Halbkreis mit Mittelpunkt Null und Radius R , positiv orientiert von $(R, 0)$ nach $(-R, 0)$ (siehe Skizze).
- Für $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ gilt dann

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{\Gamma'} \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{\Gamma''} \frac{1}{1+z^2} dz = I_R + J_R.$$

- Betrachte das Integral

$$J_R = \int_{\Gamma''} \frac{1}{1+z^2} dz$$

- Für $R > 1$ gilt $|1+z^2| \geq R^2 - 1$ auf Γ'' und somit

$$\left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1} \quad \text{für } z \in \Gamma''.$$

- Daraus folgt

$$|J_R| = \left| \int_{\Gamma''} \frac{1}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1}.$$

Weitere Fortsetzung des Beispiels.

- Weiter folgt $\lim_{R \rightarrow \infty} J_R = 0$, und somit gilt

$$I = I_R = \int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$$

- Dieses Integral berechnen wir mit dem Residuensatz: Es gilt

$$I = \int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Resf}(i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

- **Elementare Berechnung des Integrals** (mit Methoden der reellen Analysis):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

□

Nächstes Beispiel.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 4} dx := I/2.$$

- Der Integrand ist gerade, und somit gilt

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 4} dx.$$

- Es gilt (mit entsprechenden Bezeichnungen aus dem vorigen Beispiel)

$$I_R = \int_{\Gamma} \frac{1}{z^4 + 4} dz - J_R,$$

wobei erneut $\lim_{R \rightarrow \infty} J_R = 0$.

- Wir bestimmen das Integral I_R nun mit dem Residuensatz.

Fortsetzung des Beispiels.

- Der Integrand

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 4}$$

besitzt Pole erster Ordnung in den vier Punkten $\pm 1 \pm i$.

- Für $R > \sqrt{2}$ werden die beiden Pole $z = \pm 1 + i$ von Γ umlaufen.
- Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \frac{1}{z^4 + 4} \Big|_{z=1+i} &= \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=1+i} = \frac{1}{4(1+i)^3} = \frac{1+i}{4(1+i)^4} = -\frac{1+i}{16} \\ \operatorname{Res} \frac{1}{z^4 + 4} \Big|_{z=-1+i} &= \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=-1+i} = \frac{1}{4(-1+i)^3} = \frac{-1+i}{4(-1+i)^4} = -\frac{-1+i}{16} \end{aligned}$$

- Daraus folgt mit dem Residuensatz

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^4 + 4} dz = 2\pi i \left(-\frac{1+i}{16} - \frac{-1+i}{16} \right) = \frac{\pi}{4} = I.$$

□

Nächstes Beispiel. Betrachte für $a > 0$ und $\omega > 0$ das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} dx.$$

- Es gilt (mit entsprechenden Bezeichnungen aus dem vorigen Beispiel)

$$I_R = \int_{-R}^R \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} dx \quad \text{und} \quad J_R = \int_{\Gamma''} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} dz$$

wobei erneut $\lim_{R \rightarrow \infty} J_R = 0$, und somit

$$I = \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} dz.$$

- Mit dem Residuensatz gilt

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} \Big|_{z=ia} = 2\pi i \frac{e^{-\omega a}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}.$$

□

Letztes Beispiel. Betrachte für $0 < \alpha < 1$ das **reelle** Integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x)} dx < \infty.$$

Zur Berechnung von I betrachten wir das **komplexe** Integral

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^{\alpha}(1+z)} dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

wobei $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ (siehe Skizze). Der Integrand ist analytisch, bis auf einen Pol erster Ordnung in $z = -1$. Weiterhin gilt

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} I_1 = I, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} I_4 = 0,$$

so dass das Integral

$$I_3 = \int_{\Gamma_3} \frac{1}{z^{\alpha}(1+z)} dz$$

zu bestimmen bleibt.

Fortsetzung des Beispiels. Parametrisiere den Integrationsweg $-\Gamma_3$ mit $z(t) = t$ für $\delta \leq t \leq R$. Nun gilt mit $z^\alpha = |z|^\alpha e^{2\pi i \alpha}$ auf Γ_3

$$I_3 = - \int_{\delta}^R \frac{e^{-2\pi i \alpha}}{t^\alpha (1+t)} dt = -e^{-2\pi i \alpha} I_1$$

somit

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \int_{\Gamma} \frac{1}{z^\alpha (1+z)} dz = I(1 - e^{-2\pi i \alpha}).$$

Mit dem Residuensatz bekommen wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z^\alpha (1+z)} dz = \operatorname{Res} \frac{1}{z^\alpha (1+z)} \Big|_{z=-1} = \operatorname{Res} \frac{z^{-\alpha}}{1+z} \Big|_{z=-1} = e^{-i\alpha\pi},$$

somit

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} e^{-i\alpha\pi} = \pi \frac{2i}{e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}}$$

bzw.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha (1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Das Integral ist für $\alpha \rightarrow 0$ bzw. $\alpha \rightarrow 1$ divergent. □

7 Fourier-Transformation

Ausgangspunkt: Die bereits bekannte **Fourier-Reihenentwicklung** einer T -periodischen, stückweise stetig differenzierbaren Funktion $f_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{mit Frequenz } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

und mit Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau} d\tau \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Interpretationen und Begriffe.

- f_T fassen wir auf als ein zeitkontinuierliches T -periodisches **Signal**.
- Dann stellt der Fourier-Koeffizient γ_k den Verstärkungsfaktor für die **Grundschiwingung** $e^{-ik\omega\tau}$ zur **Frequenz**

$$\omega_k = k \frac{2\pi}{T} \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dar.

- Somit beschreiben die γ_k die **Amplituden** der beteiligten Schwingungen.
- Die Folge $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ wird als **Spektrum** von f_T bezeichnet.
- Das Spektrum ist eine diskrete Menge von Fourier-Koeffizienten.
- Ist das Spektrum endlich, so sind die Frequenzen der beteiligten Schwingungen beschränkt (und umgekehrt). □

Alternative Darstellung der Fourier-Reihe.

Ausgangspunkt: Wir schreiben die Frequenz ω als

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_{k+1} - \omega_k = \Delta\omega$$

Alternative Darstellung: Dann kann die Fourier-Reihe dargestellt werden als

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{i\omega_k(t-\tau)} d\tau \cdot \Delta\omega.$$

Fragen:

- Besitzt ein **nicht-periodisches** Signal $f(t)$ eine entsprechende Fourier-Darstellung? Etwa eine Fourier-Reihe? Oder etwas anderes?
- Falls ja, unter welchen Voraussetzungen?
- Wie sieht das Spektrum dann aus?

Herleitung der gewünschten Fourier-Darstellung.

Grundidee: Fasse *nicht-periodisches* Signal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als Signal mit *unendlicher* Periode auf, d.h. wir betrachten den Grenzübergang

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t)$$

mit einer (geeigneten) T -periodischen Funktion f_T .

- Setzt man hierzu

$$g_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

so bekommt man die Darstellung

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_T(\omega_k) e^{i\omega_k t} (\omega_{k+1} - \omega_k).$$

- **Beachte:** Dies ist eine Riemannsche Summe mit Zerlegung $\{\omega_k\}_k$, die für große Perioden T beliebig fein werden kann.

So bekommen wir eine Fourier-Integraldarstellung.

Setze

$$g(\omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R}.$$

Definition: Falls das Integral

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, so wird die Funktion g als **Fourier-Transformierte** der Funktion f bezeichnet. □

Vermutung: Es gilt (mit $T \rightarrow \infty$) die **Fourier-Umkehrformel**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

bzw.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega.$$

Wann gilt die Fourier-Umkehrformel?

Satz: Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf jedem endlichen reellen Intervall stückweise stetig. Weiterhin besitze f in jedem Punkt eine linksseitige und rechtsseitige Ableitung und es existiere das Integral

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt.$$

Dann gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega.$$

Falls f bei $t_0 \in \mathbb{R}$ unstetig ist, so liefert das Doppelintegral auf der rechten Seite der Fourier-Umkehrformel für $t = t_0$ den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwertes von f für $t \rightarrow t_0$, d.h. es gilt

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{t \nearrow t_0} f(t) + \lim_{t \searrow t_0} f(t) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t_0-\tau)} d\tau d\omega.$$

□

Diskrete/Kontinuierliche Fourier-Transformation.

Diskrete Fourier-Transformation: Es gilt die Fourier-Reihendarstellung

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

mit diskreten Fourier-Koeffizienten

$$\gamma_k \equiv \gamma_k(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau} d\tau \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Kontinuierliche Fourier-Transformation: Es gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

mit der kontinuierlichen Fourier-Transformation

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

□

Beispiel. Berechne die Fourier-Transformation \hat{f} des **Rechtecksimpulses**

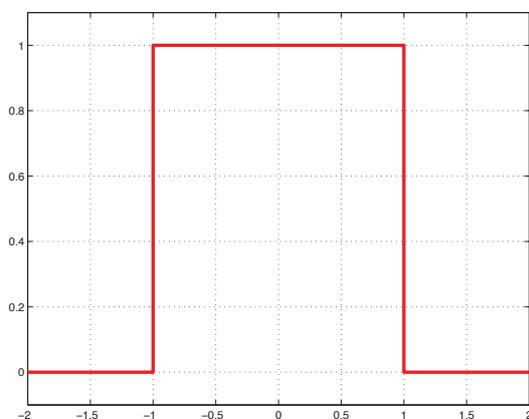
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a \leq t \leq a; \\ 0 & \text{für } |t| > a. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{t=-a}^{t=a} = -\frac{1}{i\omega} [e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}] \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin(\omega a) & \text{für } z \neq 0 \\ 2a & \text{für } z = 0 \end{cases} = 2a \cdot \text{sinc}(\omega a) \end{aligned}$$

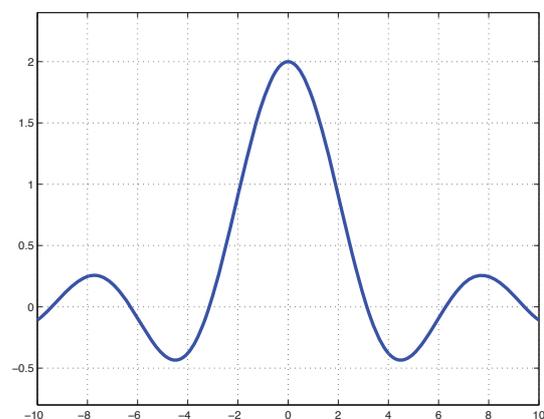
mit der **sinc-Funktion**

$$\text{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \sin(z) & \text{für } z \neq 0; \\ 1 & \text{für } z = 0; \end{cases}$$

Graphen von Einheitsimpuls und Sinc-Funktion.



Der Einheitsimpuls $f(t)$.



Die sinc-Funktion $\hat{f}(\omega)$.

Beispiel. Berechne die entsprechende Fourier-Umkehrung von

$$\hat{f}(\omega) = 2a \operatorname{sinc}(\omega a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a) \cos(\omega t)}{\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a+t)) + \sin(\omega(a-t))}{\omega} d\omega \end{aligned}$$

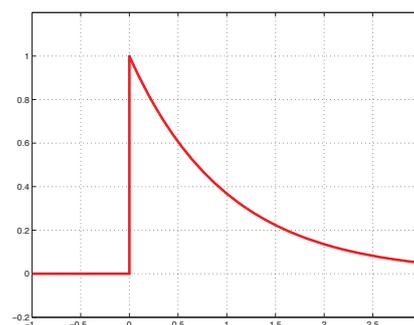
Übung: Verwende den Residuensatz, um Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt$$

zu berechnen. Zeige dann die Fourier-Umkehrformel $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) = f(t)$. □

Beispiel. Berechne für $a > 0$ die Fourier-Transformation \hat{f} von

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{für } t \geq 0; \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$



Graph von f .

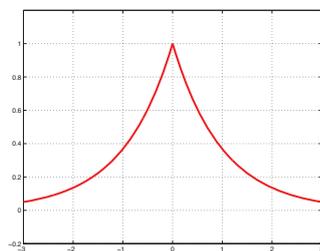
$$\begin{aligned} F[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{a+i\omega}. \end{aligned}$$

Beispiel.

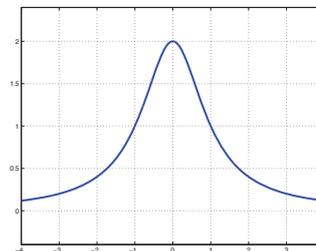
Berechne für $a > 0$ die Fourier-Transformation \hat{f} von

$$f(t) = e^{-a|t|}.$$

$$\begin{aligned} F[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{(a+i\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$



Graph von $f(t)$.



Graph von \hat{f} .

Bemerkungen zur Fourier-Transformation.

- Zerlegt man die Fourier-Transformation der *reellen* Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in Realteil und (verschwindenden!) Imaginärteil, so folgt mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau d\omega = 0$$

die **trigonometrische Darstellung**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos[\omega(t - \tau)] d\tau d\omega$$

- Falls f eine gerade Funktion ist, so gilt die Darstellung

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos(\omega t) \cos(\omega \tau) d\tau d\omega.$$

- Falls f eine ungerade Funktion ist, so gilt die Darstellung

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) \sin(\omega t) \sin(\omega \tau) d\tau d\omega.$$

Rechenregeln zur Fourier-Transformation.

Ausgangspunkt: Die (kontinuierliche) Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

- \mathcal{F} ist ein linearer **Integraloperator** bzw. **Integraltransformation**, d.h.

$$\mathcal{F}[f + g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega)$$

$$\mathcal{F}[\alpha f](\omega) = \alpha \mathcal{F}[f](\omega) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}$$

- Für die **Konjugation** \bar{f} von f gilt

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}.$$

- Für die **Streckung** $f(c \cdot)$, $c > 0$, von f gilt

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c} \mathcal{F}[f](\omega/c).$$

Weitere Rechenregeln zur Fourier-Transformation.

- **Verschiebungssätze:** Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{F}[f(t - a)](\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f](\omega)$$

$$\mathcal{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - a)$$

- **Faltungssätze:** Für $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ist die **Faltung** $f * g$ zwischen f und g definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau.$$

Es gelten die **Faltungssätze**

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$$

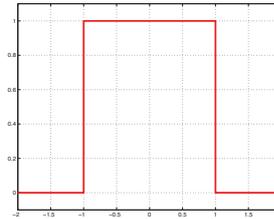
$$\mathcal{F}[f \cdot g](\omega) = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(\omega)$$

□

Beispiel.

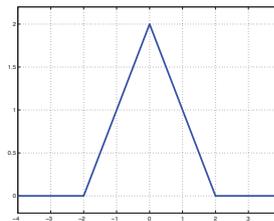
Für die **Autokorrelation** $f * f$ des Einheitsimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{für } |t| > 1; \end{cases}$$



bekommt man die **Hutfunktion**

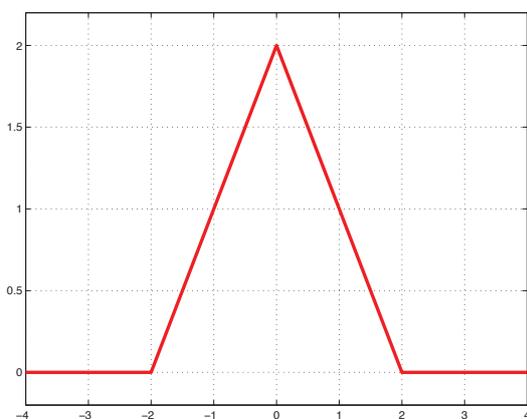
$$g(t) = \begin{cases} 2 - |t| & \text{für } -2 \leq t \leq 2; \\ 0 & \text{für } |t| > 2; \end{cases}$$



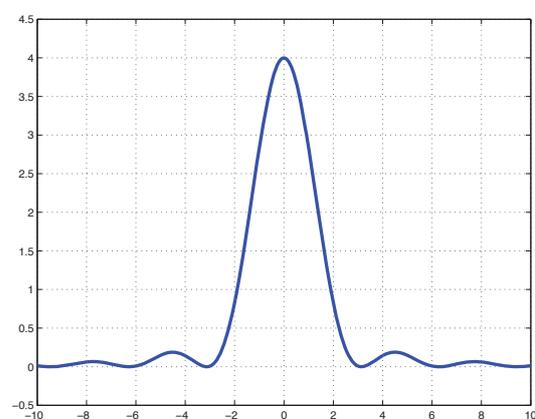
und somit gilt nach dem Faltungssatz

$$F[g](\omega) = F[f * f](\omega) = (F[f](\omega))^2 = 4\text{sinc}^2(\omega).$$

Die Hutfunktion und ihre Fourier-Transformation.



Hutfunktion
 $f(t)$.



Fourier-Transformation
 $\hat{f}(\omega) = 4\text{sinc}^2(\omega)$.

Differentiation der Fourier-Transformation.

Satz: Ist f eine stückweise C^1 -Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen t_1, \dots, t_m , und sind f und f' absolut integrierbar, d.h.

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{und} \quad \|f'\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| dt < \infty$$

so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega) - \sum_{k=1}^m (f(t_k^+) - f(t_k^-)) e^{-i\omega t_k}$$

Beweis: O.E. für eine Unstetigkeitsstelle, t_1 , gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{t_1} f'(t)e^{-i\omega t} dt + \int_{t_1}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= [f(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{t_1} + [f(t)e^{-i\omega t}]_{t_1}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= (f(t_1^-) - f(t_1^+)) e^{-i\omega t_1} + i\omega\mathcal{F}[f](\omega) \end{aligned}$$

wobei $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ verwendet wurde (wegen $f \in L_1(\mathbb{R})$). ■

Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichung.

Ziel: Bestimme eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$$

die den Wachstumsbedingungen

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} y'(t) = 0$$

genügt. Fourier-Transformation auf beiden Seiten der Gleichung ergibt

$$(-\omega^2 + i\omega a + b) Y(\omega) = C(\omega),$$

wobei $Y = \mathcal{F}[y]$ und $C = \mathcal{F}[c]$. Somit gilt

$$Y(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega a + b} C(\omega).$$

Rücktransformation liefert mit dem Faltungssatz die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega.$$

Anwendung: Wärmeleitung.

Ausgangspunkt: Wir untersuchen die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung für einen *unendlich* langen Stab,

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= c u_{xx}(x, t) \quad \text{für } -\infty < x < \infty, t \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Fourier-Transformation bez. der Ortsvariablen x ergibt

$$\begin{aligned} U_t(\omega, t) &= c(i\omega)^2 U(\omega, t) \\ U(\omega, 0) &= U_0(\omega) \end{aligned}$$

und somit

$$U(\omega, t) = U_0(\omega) e^{-c\omega^2 t},$$

wobei $U = \mathcal{F}[u]$ die Fourier-Transformation von $u \equiv u(\cdot, t)$ bezeichnet.

Fortsetzung des Anwendungsbeispiels.

Zur Rücktransformation bestimmen wir zunächst das Urbild von $e^{-ct\omega^2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-ct\omega^2} \right] (x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct\omega^2} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-([\sqrt{ct}\omega]^2 - ix/\sqrt{ct}[\sqrt{ct}\omega] - x^2/(4ct))} \cdot e^{-x^2/(4ct)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/(4ct)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-([\sqrt{ct}\omega] - ix/(2\sqrt{ct}))^2} d\omega \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} e^{-x^2/(4ct)}. \end{aligned}$$

Mit Anwendung des Faltungssatzes bekommt man die Lösung

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}} u_0(\xi) d\xi.$$

Der Faktor $G(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}}$ heißt **Greensche Funktion**. □

Anwendung: Potentialgleichung.

Ausgangspunkt: Betrachte das **Potentialproblem** auf der Halbebene.

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Fourier-Transformation bez. der Ortsvariablen x ergibt

$$U_{yy}(\omega, y) = -(i\omega)^2 U(\omega, y) = \omega^2 U(\omega, y)$$

und somit

$$U(\omega, y) = C_1 e^{|\omega|y} + C_2 e^{-|\omega|y}$$

Da die Lösung für $|y| \rightarrow \infty$ verschwindet, gilt $C_1 = 0$ und somit

$$U(\omega, y) = U_0(\omega) e^{-|\omega|y}.$$

Es gilt $\mathcal{F}^{-1} [e^{-|\omega|y}] = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2 + x^2}$ und weiterhin mit dem Faltungssatz

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} u_0(\xi) d\xi.$$

Das Theorem von Shannon.

Satz (Shannonsches Abtasttheorem):

Sei $f(t)$ ein bei $t = 0$ einsetzendes und für alle $t \geq 0$ definiertes Signal. Durch $f(-t) = f(t)$ werde f zu einer geraden Funktion auf \mathbb{R} fortgesetzt. Weiterhin erfülle f die Voraussetzungen für den Satz über die Fourier-Umkehrformel. Schließlich sei das Spektrum von f beschränkt, d.h. für ein $\omega_0 > 0$ gilt

$$\hat{f}(\omega) = 0 \quad \text{für } |\omega| > \omega_0 > 0.$$

Tastet man f zu den Zeitpunkten

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ab, so kann f aus diesen Informationen für alle t exakt rekonstruiert werden.

Beweis: Unter den Voraussetzungen für die Fourier-Umkehrformel gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Setze $\hat{f}(\omega)$ zu einer $2\omega_0$ -periodischen Funktion fort, mit

$$\hat{f}(\omega \pm 2\omega_0) = \hat{f}(\omega).$$

Dann besitzt die Fourier-Reihe

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \frac{\pi}{\omega_0} \omega}$$

die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-ik \frac{\pi}{\omega_0} \omega} d\omega$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man mit der Fourier-Umkehrformel schreiben als

$$c_k = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-k \frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(k \frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f(t_k)$$

Setzt man die Darstellung von \hat{f} in die Umkehrformel ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)} d\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{i(t+k\pi/\omega_0)} \left[e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)} \right]_{\omega=-\omega_0}^{\omega=\omega_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\omega_0 c_k \frac{1}{\omega_0 t + k\pi} \sin(\omega_0 t + k\pi). \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) \frac{\sin(\omega_0 t + k\pi)}{\omega_0 t + k\pi} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

8 Laplace-Transformation

Ausgangspunkt: Die **Heaviside-Funktion**

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

besitzt **keine** Fourier-Transformation.

Denn: Formal bekommt man das unbestimmte Integral

$$\hat{u}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{i\omega} \left[1 - \lim_{\tau \rightarrow \infty} (\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) \right]$$

das für $\omega \neq 0$ offensichtlich nicht existiert.

Beachte: $u \notin L_1(\mathbb{R})$.

Gibt es alternative Integraltransformationen?

Voraussetzung: Ab sofort $f(t) = 0$ für $t < 0$, so dass formal (wie eben)

$$g(\omega) := \hat{f}(\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Nun: Um Konvergenz zu erzwingen, verwenden wir **konvergenzerzeugenden Faktor** $e^{-a\tau}$, für $a > 0$, und betrachten stattdessen das uneigentliche Integral

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} F(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \text{wobei } F(\tau) = e^{-a\tau} f(\tau) \quad \text{für } a > 0.$$

und somit

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(a+i\omega)\tau} d\tau$$

Beachte: Es gelten (unter Voraussetzungen an f) die (Fourier-)Umkehrformeln

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{(a+i\omega)t} d\omega. \end{aligned}$$

Konstruktion der Laplace-Transformation.

Ausgangspunkt: Mit der Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{(a+i\omega)t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(a+i\omega)\tau} e^{(a+i\omega)t} d\tau d\omega$$

und der Substitution $s = a + i\omega \in \mathbb{C}$ erhält man mit dem Symbol

$$[\mathcal{L}(f)](s) := G\left(\frac{s-a}{i}\right) = G(\omega)$$

die **Laplace-Transformation**

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau =: \phi(s)$$

sowie die **Laplace-Umkehrformel**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \phi(s) e^{st} ds =: [\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))](t).$$

□

Die Laplace-Transformation und deren Inverse.

Definition: Falls für f das uneigentliche Integral

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \phi(s)$$

existiert, so bezeichnet man ϕ als **Laplace-Transformation** von f .

Falls für ϕ das uneigentliche Integral

$$[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \phi(s) e^{st} ds$$

existiert, so bezeichnet man $\mathcal{L}^{-1}(\phi)$ als **inverse Laplace-Transformation** von ϕ . Der Integraloperator \mathcal{L}^{-1} wird entsprechend als **inverse Laplace-Transformation** bezeichnet.

Somit gilt (unter geeigneten Voraussetzungen)

$$\phi(s) = [\mathcal{L}(f)](s) \quad \text{und} \quad f(t) = [\mathcal{L}^{-1}(\phi)](t).$$

□

Zur Existenz der Laplace-Transformation.

Satz: Sei f auf $(0, \infty)$ **lokal integrierbar**, und es gelte

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad \text{für alle } t \geq 0$$

mit geeigneten Konstanten M und γ , so existiert die Laplace-Transformation

$$\phi(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \gamma$.

Beweis: Mit $f(t)$ ist auch $e^{-st}f(t)$ lokal integrierbar, und wegen

$$|e^{-st}f(t)| = e^{-\operatorname{Re}(s) \cdot t} |f(t)|$$

gilt mit dem Majorantenkriterium sogar absolute Konvergenz,

$$\left| \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} M e^{-(\operatorname{Re}(s) - \gamma)\tau} d\tau = \frac{M}{\operatorname{Re}(s) - \gamma}. \quad \blacksquare$$

- Das Infimum aller γ mit obiger Abschätzung heißt **Konvergenzabzisse** von f .

Beispiele.

Beispiel 1: Für die **Heaviside-Funktion**

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

gilt

$$[\mathcal{L}(u)](s) = \phi(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} d\tau = -\frac{1}{s} [e^{-s\tau}]_{\tau=0}^{\tau=\infty} = \frac{1}{s}$$

für $\operatorname{Re}(s) > 0$. In diesem Fall ist $\gamma_0 = 0$ die Konvergenzabzisse.

Beispiel 2: Für $\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(\beta)$ (und somit $\gamma_0 = -\operatorname{Re}(\beta)$) gilt

$$[\mathcal{L}(e^{-\beta t})](s) = \int_0^{\infty} e^{-(\beta+s)\tau} d\tau = \frac{1}{s + \beta}.$$

Weiteres Beispiel.

Beispiel 3: Für $\operatorname{Re}(s) > 0$ gilt

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}(\sin(\beta t))](s) &= \int_0^{\infty} \sin(\beta\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= -\frac{1}{\beta} [\cos(\beta\tau) e^{-s\tau}]_{\tau=0}^{\tau=\infty} - \frac{s}{\beta} \int_0^{\infty} \cos(\beta\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\beta} - \frac{s}{\beta} \left\{ \frac{1}{\beta} [\sin(\beta\tau) e^{-s\tau}]_{\tau=0}^{\tau=\infty} + \frac{s}{\beta} \int_0^{\infty} \sin(\beta\tau) e^{-s\tau} d\tau \right\} \end{aligned}$$

und somit

$$\left(1 + \frac{s^2}{\beta^2}\right) [\mathcal{L}(\sin(\beta t))](s) = \frac{1}{\beta} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0$$

Analog zeigt man

$$[\mathcal{L}(\cos(\beta t))](s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0$$

□

Noch ein Beispiel.

Beispiel 4: Betrachte für $s > 0$ (reell und positiv) die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(t^n)](s) = \int_0^{\infty} \tau^n e^{-s\tau} d\tau$$

so folgt (mit der Substitution $\xi = s\tau$)

$$[\mathcal{L}(t^n)](s) = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} \xi^n e^{-\xi} d\xi = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad \text{für } s > 0,$$

und somit (für $n \in \mathbb{N}_0$)

$$[\mathcal{L}(t^n)](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{für } s > 0.$$

□

Laplace-Transformation von Ableitungen.

Erfüllt f' für $f \in C^1$ die Voraussetzungen des vorigen Satzes zur Existenz der Laplace-Transformation, so bekommt man für die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(f')](s) = \int_0^{\infty} f'(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

mit partieller Integration

$$[\mathcal{L}(f')](s) = [f(\tau) e^{-s\tau}]_{\tau=0}^{\tau=\infty} + s \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

so dass mit (der angegebenen Voraussetzung) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) e^{-s\tau} = 0$ gilt

$$[\mathcal{L}(f')](s) = s \cdot [\mathcal{L}(f)](s) - f(0).$$

Für höhere Ableitungen von f gilt unter entsprechenden Voraussetzungen

$$[\mathcal{L}(f^{(n)})](s) = s^n \cdot [\mathcal{L}(f)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0).$$

□

Noch mehr Beispiele.

Beispiel 5: Mit der Substitution $k\tau = \xi$ bekommt man für

$$[\mathcal{L}(f(k\tau))](s) = \int_0^{\infty} f(k\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad \text{für } k > 0$$

das Resultat

$$[\mathcal{L}(f(k\tau))](s) = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{s}{k}\xi} d\xi = \frac{1}{k} [\mathcal{L}(f(t))](s/k)$$

Beispiel 6: Es gilt

$$[\mathcal{L}(t \cdot f(t))](s) = \int_0^{\infty} \tau f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

und daraus folgt die Implikation

$$\phi(s) = [\mathcal{L}(f(t))](s) \quad \implies \quad \phi'(s) = -[\mathcal{L}(t \cdot f(t))](s).$$

□

Verschiebungssätze.

Erster Verschiebungssatz: Es gilt der **erste Verschiebungssatz**

$$[\mathcal{L}(e^{-kt}f(t))](s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-(s+k)\tau} d\tau = [\mathcal{L}(f(t))](s+k)$$

für $\operatorname{Re}(s) > \max(\gamma_0, \gamma_0 - k)$. Mit der Rücktransformation erhält man

$$[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))](t) = e^{-kt}\mathcal{L}^{-1}[(\phi(s-k))](t),$$

Zweiter Verschiebungssatz: Es gilt der **zweite Verschiebungssatz**

$$[\mathcal{L}(f(t-k))](s) = e^{-sk}[\mathcal{L}(f(t))](s).$$

□

Faltungssatz.

Satz: Für die **Faltung (Konvolution)**

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$$

zweier Funktionen f und g gilt (unter den vorigen Voraussetzungen) die Formel

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}(f * g)](s) &= \int_0^{\infty} (f * g)(\alpha)e^{-s\alpha} d\alpha \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\alpha} f(\tau)g(\alpha-\tau) d\tau e^{-s\alpha} d\alpha \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beweises.

Unter Vertauschung der Integrationsreihenfolge bekommt man

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}(f * g)](s) &= \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(\tau)g(\alpha - \tau)e^{-s\alpha} d\alpha d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} \int_\tau^\infty g(\alpha - \tau)e^{-s(\alpha - \tau)} d\alpha d\tau \end{aligned}$$

und weiterhin (mit der Substitution $\rho = \alpha - \tau$ im zweiten Integral)

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}(f * g)](s) &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} \int_0^\infty g(\rho)e^{-s\rho} d\rho d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_0^\infty g(\rho)e^{-s\rho} d\rho \\ &= [\mathcal{L}(f)](s) \cdot [\mathcal{L}(g)](s) \end{aligned}$$

■

Beispiel.

Betrachte die Funktion

$$H(s) = \frac{1}{s^3(s^2 + \omega^2)} = \frac{1}{s^3} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} =: F(s) \cdot G(s)$$

Für $f(t) = t^2/2$ (Beispiel 4) und $g(t) = \sin(\omega t)/\omega$ (Beispiel 3) gilt

$$[\mathcal{L}(f)](s) = F(s) \quad \text{und} \quad [\mathcal{L}(g)](s) = G(s)$$

Mit dem Faltungssatz gilt daher

$$h(t) := [\mathcal{L}^{-1}(H)](t) = [\mathcal{L}^{-1}(F \cdot G)](t) = (f * g)(t)$$

und somit (unter zweifacher Verwendung partieller Integration)

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\omega} \int_0^t \tau^2 \sin(\omega(t - \tau)) d\tau \\ &= \frac{t^2}{2\omega^2} - \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^4}. \end{aligned}$$

□