Fachbereich Mathematik **WiSe 2015/2016**
Prof. Dr. A. Iske

Klausur Komplexe Funktionen

17. Februar 2016

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: (5 Punkte)

a) Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) := (z+\bar{z})^2 - 4\,(\mathrm{Im}\,(z))^2 + i \cdot k \cdot \mathrm{Re}\,(z) \cdot \mathrm{Im}\,(z)$$

in jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

b) Sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl. Weiterhin sei die Funktion g gegeben durch:

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,,\ g(z) := |z|^2 + \frac{a^2}{|z|^2}\,.$$

In welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ ist g komplex differenzierbar?
Tipp: Polarkoordinaten!

Lösung zu 1:

a) Mit der üblichen Bezeichnung $z = x + iy$ gilt
$f(z) = (x+iy+x-iy)^2 - 4y^2 + i \cdot kxy = \underbrace{(4x^2-4y^2)}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{(kxy)}_{v(x,y)}$.
Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten:
$u_x = 8x \overset{!}{=} v_y = kx$ also $\boxed{k=8}$
und
$-u_y = 8y \overset{!}{=} v_x = ky$ also wieder $\boxed{k=8}$.
Für $k = 8$ ist f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar. **(2 Punkte)**

b) Mit $z = re^{i\phi}$ gilt

$$g(z) := |z|^2 + \frac{a^2}{|z|^2} = \underbrace{\left(r^2 + \frac{a^2}{r^2}\right)}_{u(r,\phi)} + i \cdot \underbrace{0}_{v(r,\phi)}\,.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten:
$v_r = 0 \overset{!}{=} -\frac{1}{r}u_\phi = 0$
und
$u_r = \left(2r - \frac{2a^2}{r^3}\right) \overset{!}{=} \frac{1}{r}v_\phi = 0\,.$
Die Funktion ist also genau dann komplex differenzierbar, wenn
$2r - \frac{2a^2}{r^3} = 0 \iff r = \frac{a^2}{r^3} \iff r^4 = a^2\,.$
g ist auf dem Kreis mit Radius $r = \sqrt{a}$ um Null komplex differenzierbar. **(3 Punkte)**

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Sei $\Gamma := \{z(t) = i + 4 \cdot e^{it} \,|\, t \in [0, 2\pi]\}$ der in mathematisch positiver Richtung durchlaufene Rand des Kreises mit Radius 4 um die imaginäre Einheit i.

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2+1}{z-5}\,dz$.

b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2+1}{z(z+2i)}\,dz$.

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2+1}{(z-i)^2}\,dz$.

d) $\displaystyle\int_\Gamma \overline{z-i}\,dz$.

Lösung zu 2:

a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2+1}{z-5}\,dz = 0$ (CIS) **[1 Punkt]**

b) Nach dem Residuensatz gilt:

$$\int_\Gamma \frac{z^2+1}{z(z+2i)}\,dz = 2\pi i \left(\left[\frac{z^2+1}{z+2i}\right]_{z=0} + \left[\frac{z^2+1}{z}\right]_{z=-2i} \right)$$
$$= 2\pi i \left(\frac{1}{2i} + \frac{-3}{-2i} \right) = 4\pi\,. \ \textbf{(2 Punkte)}$$

c) Nach der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen ist

$$\int_\Gamma \frac{z^2+1}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\left[(z^2+1)'\right]_{z=i} = 2\pi i \cdot 2i = -4\pi\,. \ \textbf{(2 Punkte)}$$

d)

$$\int_\Gamma \overline{z-i}\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{i+4e^{it}-i} \cdot \dot{z}(t)dt = \int_0^{2\pi} \overline{4e^{it}} \cdot 4ie^{it}dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 16i \cdot e^{-it} \cdot e^{it}dt = 2\pi \cdot 16i = 32\pi i. \ \textbf{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Gegeben ist $\quad f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2iz + 3}$.

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten der Funktion f.

c) Geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

d) Bestimmen Sie diejenige Laurent-Entwicklung der Funktion f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, die in der Umgebung des Punktes $z^* = 2i$ gegen $f(2i)$ konvergiert.

Lösungsskizze zur Aufgabe 3) $\quad f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2iz + 3}$.

a) Nennernullstellen: $(z-i)^2 + 4 = 0 \iff z_{1,2} = i \pm 2i$.

Es gilt $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)(z-3i)}$. In $z_{1,2}$ liegen einfache Pole vor. **[1 Punkt]**

b) Residuen **[2 Punkte]**

$$Res\, f(-i) = \left[\frac{1}{z-3i}\right]_{z=-i} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}.$$

$$Res\, f(3i) = \left[\frac{1}{z+i}\right]_{z=3i} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

c) Nach Teil a) und b) gilt: $f(z) = \dfrac{i}{4} \cdot \dfrac{1}{z+i} - \dfrac{i}{4} \cdot \dfrac{1}{z-3i}$. **(1 Punkt)**

d) Wegen $|2i - z_0| = |2i - 0| = 2$ suchen wir die Laurent-Reihe für $1 < |z - z_0| < 3$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. In diesem Ring gilt

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{z}}\right) = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{-i}{z}}\right) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{z^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-i)^{-k-1}\, z^k.$$

sowie

$$\frac{1}{z-3i} = \frac{1}{-3i} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{3i}}\right) = \frac{-1}{3i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(3i)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-z^k}{(3i)^{k+1}}.$$

und damit

$$f(z) = \frac{i}{4} \cdot \sum_{k=-\infty}^{-1} (-i)^{-k-1}\, z^k - \frac{i}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} - \frac{z^k}{(3i)^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} -\frac{(-i)^{-k}}{4}\, z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{4 \cdot 3^{k+1} i^k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} -\frac{i^k}{4}\, z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k z^k}{4 \cdot 3^{k+1}}.$$

[4 Punkte]