Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4 : Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

In welchen Punkten ihres Definitionsbereiches sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar?

a) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_1(z) = \mathrm{Re}\,(z) \cdot \mathrm{Im}\,(z)$.

b) $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
$f_2(z) = (\mathrm{Re}\,(z) + 2)^2 - (\mathrm{Im}\,(z) + 2)^2 + i\big[\mathrm{Im}\,(z)(\mathrm{Re}\,(z) + 4) + \mathrm{Re}\,(z)(\mathrm{Im}\,(z) + 4)\big]$.

c) $f_3 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f_3(z) = \dfrac{z^2}{\bar{z}}$.
Tipp: Verwenden Sie die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten: $u_r = \frac{1}{r} v_\varphi$ und $v_r = -\frac{1}{r} u_\varphi$.

Aufgabe 2)

a) Bestimmen Sie alle in $D := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ holomorphen Funktionen mit
   (i) $\mathrm{Re}\,(f(z)) = 3$.
   (ii) $\mathrm{Re}\,(f(z)) = k \log \sqrt{x^2 + y^2}$.
   Tipp: Hier wählt man am besten wieder die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten:
   $u_r = \frac{1}{r} v_\varphi$ und $v_r = -\frac{1}{r} u_\varphi$.

b) Gegeben ist die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x, y) := (e^{2y} - e^{-2y}) \sin(2x)$.
   (i) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist, d.h. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
   (ii) Konstruieren Sie zu u eine konjugiert harmonische Funktion v. D.h.: Bestimmen Sie v so, dass $f(z) = f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$ holomorph wird.

Bearbeitungstermine: 1.6.15 - 5.6.15