Aufgabe 1:

a) (i) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(i) = 0\,, \quad T(-i) = \infty \quad \text{und} \quad T(0) = -1\,.$$

(ii) Man bestimme die Bilder der imaginären Achse, des Einheitskreises und der reellen Achse bezüglich T.

b) Man entscheide (mit Begründung), ob

(i) $g(z) = e^z + e^{\bar{z}}$ holomorph ist,

(ii) $f(z) = (z+\bar{z})^2 - 2|z|^2 + (z+\bar{z})(z-\bar{z}) + 3$ holomorph ist,

(iii) $h(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 5xy + 4x - 3y + 2$ harmonisch ist.

c) Man berechne bei positiv durchlaufener Kurve $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{\sin z}{(z-\pi)^4}\,dz$.

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die durch

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{2}{z+4} + \exp\left(\frac{4}{z+2}\right)$$

definierte Funktion.

(i) Man bestimme die Laurent-Reihe von f um $z_0 = -2$,

(ii) Man klassifiziere alle Singularitäten von f und berechne deren Residuen.

(iii) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z+2|=1} f(z)\,dz$ und $\displaystyle\oint_{|z+4|=3} f(z)\,dz$ für positiv durchlaufene Kurven.

b) Man berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+5}\,dx$.