Aufgabe 1:

a) (i) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(0) = 0\,, \quad T(2i) = \infty \quad \text{und} \quad T(i) = 1\,.$$

(ii) Man skizziere die Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \; z = t + i\;,\; t \in \mathbb{R}\}$ und den Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \; |z + i| = \sqrt{3}\}$ und berechne die sowohl zu G als auch zu K symmetrisch liegenden Punkte z_1 und z_2.

(iii) Man skizziere die Bildkreise $T(G)$ und $T(K)$ und ermittle ihre Radien.

b) Zur harmonischen Funktion

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + e^x \cos y$$

konstruiere man eine Funktion $v(x, y)$, so dass die Funktion
$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.
Ist v harmonisch?

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{1}{z^3 + 3z}$ definierte Funktion.

(i) Man bestimme den Typ aller Singularitäten von f und berechne die zugehörigen Residuen.

(ii) Man gebe die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

(iii) Man skizziere die Konvergenzbereiche der verschiedenen Potenzreihenentwicklungen um $z_0 = 0$ und berechne die, die im Punkt $z^* = 1$ konvergiert.

(iv) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z|=1} f(z)\; dz$ und $\displaystyle\oint_{|z|=2} f(z)\; dz$ für positiv durchlaufene Kurven.

b) Man berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 3}\, dx$.