Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Für die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= \frac{1}{z^4 + z^2}, & \text{b) } f(z) &= \sin \frac{1}{z}, \\ \text{c) } f(z) &= \frac{z - \sin z}{z^2}, & \text{d) } f(z) &= \coth z \end{aligned}$$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten drei (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z_0 = 0$, die für große z konvergiert.

Aufgabe 22:

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{32}{z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 16}.$$

- Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von f .
- Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c f(z) dz$$

für den Kreis $c : |z + 2 - 2i| = 3$.

Aufgabe 23: (Klausuren SoSe08 und WiSe08/09)

Man berechne unter Verwendung des Residuenkalküls die folgenden Integrale

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{5/2} + 13x^{3/2} + 36x^{1/2}} dx, & \text{b)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx, \\ \text{c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 10x^2 + 9} dx, & \text{d)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2 - 6x + 10} dx. \end{array}$$

Aufgabe 24: (Klausur SoSe06)

Gegeben sei die durch $f(z) = \frac{z+3}{z^3 - z^2 - 7z + 15}$ definierte Funktion.

- Man bestimme den Typ aller Singularitäten von f .
- Man berechne die Residuen aller Singularitäten.
- Man gebe die komplexe Partialbruchzerlegung von f an mit Hilfe von Laurent-Reihenanteilen.
- Man skizziere die Konvergenzbereiche der verschiedenen Reihenentwicklungen um $z_0 = 0$.
- Man berechne die Laurent-Reihe um $z_0 = 0$, die im Punkt $z^* = 5$ konvergiert.

f) Man berechne $\oint_{|z-2+2i|=2} f(z) dz$.

g) Man berechne $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

Abgabetermin: 1.7.-4.7. (zu Beginn der Übung)

Tutoren gesucht:

Für die Durchführung von Übungen zu Analysis I im Wintersemester 2014/15 suchen wir noch studentische Tutoren.

Bewerbungen bitte per email an Kai Rothe (rothe@math.uni-hamburg.de) richten mit Namen, Matrikelnummer, Studiengang und bisherigen Ergebnissen in Mathematik.