Aufgabe 1)

Gegeben sei die Menge $S = \{3 + r\cos(\phi) + ir\sin(\phi) : r \in]0, \infty[\ ,\ \phi \in] - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}[\ \} \subset \mathbb{C}$,

sowie die Abbildung

$$F(z) = \ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}(z-3)^2\right),$$

wobei ln den Hauptwert des komplexen Logarithmus bezeichnet.

a) Skizzieren Sie die Menge S in der komplexen Ebene.

Es bezeichne $F(S)$ das Bild von S unter der Abbildung F. Skizzieren Sie $F(S)$ und beschreiben Sie $F(S)$ explizit als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

b) Bestimmen Sie das Bild $F(H)$ der Menge $H =]3, \infty[$ unter der Abbildung F.

c) Bestimmen Sie das Bild $F(R)$ der Menge $R = \{3 + 2e^{i\phi} : \phi \in] - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}[\}$ unter der Abbildung F.

Lösungsskizze zur Aufgabe 1)

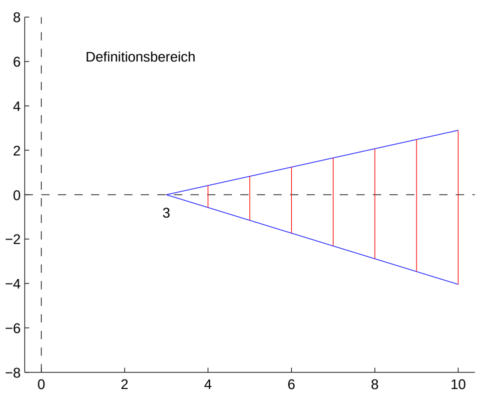
a) $\tilde{w} = z - 3 = \tilde{r}e^{i\tilde{\phi}} \iff \tilde{r} \in]0, \infty[,\ \tilde{\phi} \in] - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}[$

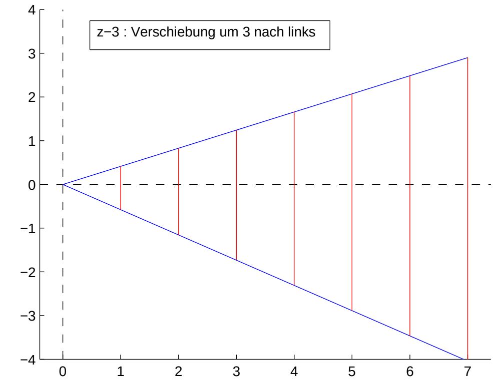
$\hat{w} = (z-3)^2 = \hat{r}e^{i\hat{\phi}} \iff \hat{r} \in]0, \infty[,\ \hat{\phi} \in] - \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}[$

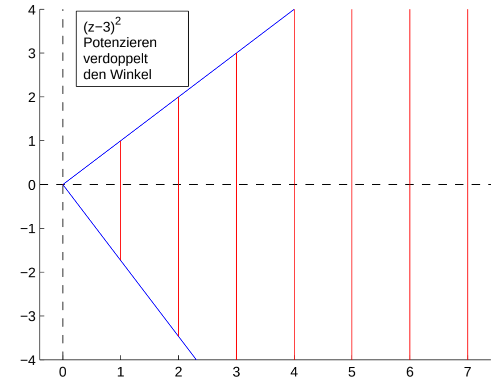
$w^* = e^{i\frac{\pi}{4}}(z-3)^2 = r^*e^{i\hat{\phi}^*} \iff r^* \in]0, \infty[,\ \phi^* \in] - \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}[$

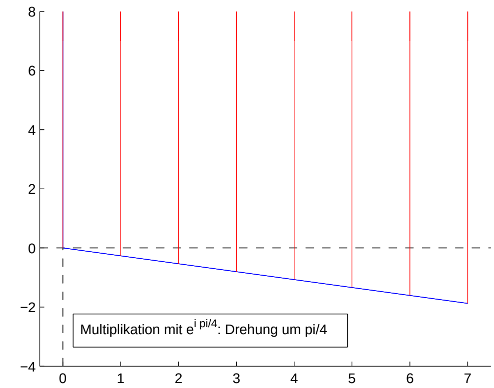
$f(z) = \ln(w^*) = \ln(|w^*|) + i \cdot \arg(w^*)$

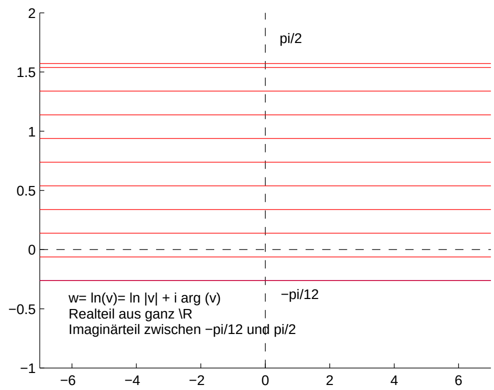
$\implies \mathrm{Re}\,(f(z)) \in] - \infty, \infty[,\ \mathrm{Im}\,(f(z)) \in] - \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}[$




z−3 : Verschiebung um 3 nach links


(z−3)^2
Potenzieren
verdoppelt
den Winkel


Multiplikation mit e$^{i\ pi/4}$: Drehung um pi/4


pi/2
−pi/12
w= ln(v)= ln |v| + i arg (v)
Realteil aus ganz \R
Imaginärteil zwischen −pi/12 und pi/2

b) $H = (3, \infty) \implies f(H) = \ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathbb{R}\right)$

Für den Realteil von $f(z)$ mit $z \in H$ erhält man
$\mathrm{Re}\,(f(z)) = \ln(|e^{i\frac{\pi}{4}}\,x|) = \ln(|x|)$ mit $x \in \mathbb{R}^+$
Also $\mathrm{Re}\,(f(z)) \in]-\infty, \infty[$.

Für den Imaginärteil von $f(z)$ gilt
$\mathrm{Im}\,(f(z)) = \arg\,(e^{i\frac{\pi}{4}}\,x)$ mit $x \in \mathbb{R}^+$
Also $\mathrm{Im}\,(f(z)) = \frac{\pi}{4}$.

Das Bild ist eine Gerade parallel zur reellen Achse durch $i\,\frac{\pi}{4}$.

c) $f(R)$ für $R = \{3 + 2e^{i\phi} |\, \phi \in]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}[\}$.

$$\begin{aligned} f(3+2e^{i\phi}) &= \ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}(3+2e^{i\phi}-3)^2\right) = \ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}(2e^{i\phi})^2\right) \\ &= \ln\left(4\,e^{i(2\phi+\frac{\pi}{4})}\right) = \ln(4) + i\cdot(2\phi + \frac{\pi}{4})\,. \end{aligned}$$

Das Bild ist ein Geradenstück mit $\mathrm{Re}\,f(z) = \ln(4)$ und

$\mathrm{Im}\,(f(z) \in]\,\frac{\pi}{4} + 2\cdot(-\frac{\pi}{6}),\ \frac{\pi}{4} + 2\cdot(\frac{\pi}{8})\,[=]\,-\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{2}\,[\,.$

Aufgabe 2)

Gegeben ist $\quad f(z) \;=\; \dfrac{1}{z^2 - 6z + 10}\,.$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der Funktion f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 3 + i$, die im Punkt $z^* = 0$ konvergiert.

d) Berechnen Sie die folgenden Integrale sofern diese definiert sind.

$$\textbf{i)} \quad \oint_{c_1} f(z)\,dz, \qquad c_1(t) := 2\,e^{it},\; t \in [0, 2\pi],$$

$$\textbf{ii)} \quad \oint_{c_2} f(z)\,dz, \qquad c_2(t) := i + 3\,e^{it},\; t \in [0, 2\pi],$$

$$\textbf{iii)} \quad \oint_{c_3} f(z)\,dz, \qquad c_3(t) := 3 - 2i + 2\,e^{it},\; t \in [0, 4\pi],$$

$$\textbf{iv)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 10}\,dx\,.$$

Lösungsskizze zur Aufgabe 2) $\quad f(z) \;=\; \dfrac{1}{z^2 - 6z + 10}\,.$

a) Nennernullstellen: $(z-3)^2 + 1 = 0 \iff z_{1,2} = 3 \pm i\,.$

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z-(3+i))(z-(3-i))}\,.$$

In $z_{1,2}$ liegen einfache Pole vor. **[1 Punkt]**

b) Residuen

$$Res\, f(3+i) = \left[\frac{1}{z-(3-i)}\right]_{z=3+i} = \frac{1}{3+i-(3-i)} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$Res\, f(3-i) = \left[\frac{1}{z-(3+i)}\right]_{z=3-i} = \frac{1}{3-i-(3+i)} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

c) Laurent-Reihe mit Entwicklungspunk $z_0 = 3 + i$ im Ring

$$|3 - i - z_0| \;=\; |3 - i - 3 - i| \;=\; 2 \;<\; |z - z_0| \;=\; |z - (3+i)|\,.$$

$$\frac{1}{z-(3-i)} = \frac{1}{(z-(3+i))+2i} = \frac{1}{z-(3+i)}\,\frac{1}{1+\frac{2i}{z-(3+i)}}$$

$$= \frac{1}{z-(3+i)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-2i}{z-(3+i)}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-2i)^k\,(z-(3+i))^{-k-1} = \sum_{k=-\infty}^{-1}(-2i)^{-k-1}\,(z-(3+i))^k\,.$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-(3+i))(z-(3-i))} = \sum_{k=-\infty}^{-1}(-2i)^{-k-1}\,(z-(3+i))^{k-1}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-2}(-2i)^{-k-2}\,(z-(3+i))^k\,. \qquad \textbf{[3 Punkte]}$$

.

d) Integrale sofern diese definiert sind.

(i) $c_1(t) := 2\,e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$,

$$\oint_{c_1} f(z)\,dz = 0 \qquad \text{(CIS)}$$

(ii) $c_2(t) := i + 3\,e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$,

$\oint_{c_2} f(z)\,dz$ ist nicht definiert, da $z_1 = 3+i$ auf der Kurve liegt. **[1 Punkt]**

(iii) $c_3(t) := 3-2i + 2\,e^{it},\ t \in [0, 4\pi]$,

$$\oint_{c_3} f(z)\,dz = Uml(c_3, 3-i)2\pi i\,Res\,f(3-i) = -2\pi\,. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(iv) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-6x+10}\,dx = 2\pi i\,Res\,f(3+i) = \pi\,. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$