Aufgabe 1)

Gegeben sei die Menge $S = \{3 + r\cos(\phi) + ir\sin(\phi) : r \in]0, \infty[\ ,\ \phi \in] - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}[\ \} \subset \mathbb{C}$,

sowie die Abbildung

$$F(z) = \ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}(z-3)^2\right),$$

wobei ln den Hauptwert des komplexen Logarithmus bezeichnet.

a) Skizzieren Sie die Menge S in der komplexen Ebene.

Es bezeichne $F(S)$ das Bild von S unter der Abbildung F. Skizzieren Sie $F(S)$ und beschreiben Sie $F(S)$ explizit als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

b) Bestimmen Sie das Bild $F(H)$ der Menge $H =]3, \infty[$ unter der Abbildung F.

c) Bestimmen Sie das Bild $F(R)$ der Menge $R = \{3 + 2e^{i\phi}\ :\ \phi \in] - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}[\}$ unter der Abbildung F.

Aufgabe 2) Gegeben ist $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 6z + 10}$.

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der Funktion f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 3 + i$, die im Punkt $z^* = 0$ konvergiert.

d) Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern diese definiert sind.

i) $\displaystyle\oint_{c_1} f(z)\,dz, \qquad c_1(t) := 2\,e^{it},\ t \in [0, 2\pi],$

ii) $\displaystyle\oint_{c_2} f(z)\,dz, \qquad c_2(t) := i + 3\,e^{it},\ t \in [0, 2\pi],$

iii) $\displaystyle\oint_{c_3} f(z)\,dz, \qquad c_3(t) := 3 - 2i + 2\,e^{it},\ t \in [0, 4\pi],$

iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 10}\,dx\,.$