Aufgabe 1)

Gegeben sei die Möbius-Transformation

$$T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T(z) := \frac{10}{z+1}, \qquad \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

a) Bestimmen Sie die Bilder folgender Geraden unter der Abbildung T. Geben Sie dazu jeweils eine genaue Begründung an.

(i) $g_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : \mathrm{Im}\,(z) = 0\}$.

(ii) $g_2 = \{z \in \mathbb{C}^* : \mathrm{Re}\,(z) = 4\}$.

(iii) $g_3 = \{z \in \mathbb{C}^* : \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)\}$.

b) Auf welche Menge wird dann das Innere des Dreiecks mit den Ecken 0, 4, $4 + 4i$ abgebildet?

Fertigen Sie Skizzen der Urbild- und Bildebene an!

Lösungsskizze zur Aufgabe 1)

a) (i) **(2 Punkte)** Verallgemeinerte Kreise durch -1 werden auf Geraden abgebildet. Also ist das Bild der reellen Achse eine Gerade, wobei

$$T(0) = 10, \quad T(\infty) = 0$$

gilt. Es ist also $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Alternativ: die Koeffizienten sind reell, also kann das Bild der reellen Achse nur die reelle Achse sein.

(ii) **(3 Punkte)** Das Bild von g_2 ist ein echter Kreis, da $-1 \notin g_2$. Dieser ist symmetrisch zum Bild der reellen Achse, also $\mathbb{R}$.

Der Mittelpunkt M_2 des Bildkreises liegt also auf $\mathbb{R}$.

Wegen $T(4) = 2$ und $T(\infty) = 0$ folgt

$$M_2 = 1, \qquad R_2 = 1\,.$$

(iii) **(3 Punkte)** Das Bild von g_3 ist wieder ein echter Kreis K_3, da $-1 \notin g_3$.

In der Bildebene sind der Mittelpunkt M_3 von K_3 und ∞ symmetrisch bezüglich K_3. Also sind in der Urbildebene $T^{-1}(M_3)$ und $T^{-1}(\infty) = -1$ symmetrisch bezüglich g_3.

$$T^{-1}(M_3) = -i \implies M_3 = \frac{10}{-i+1} = \frac{10(1+i)}{1-i^2} = 5 + 5i.$$

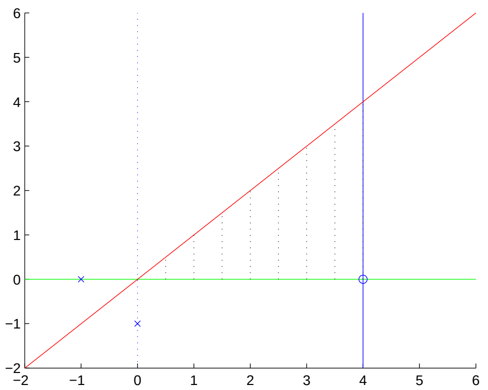
Wegen $T(\infty) = 0$ geht der Kreis durch den Ursprung und hat den Radius $R_3 = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

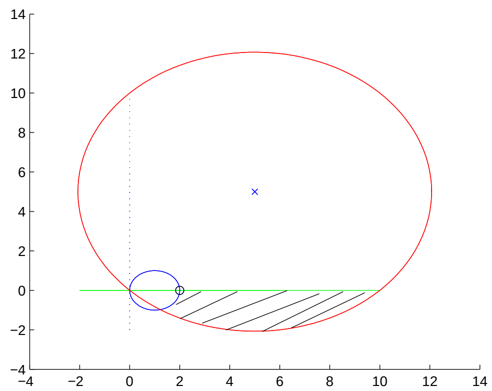
b) **(2 Punkte)** Das Dreieck wird begrenzt durch die Geraden g_1, g_2, g_3. Das Bild wird also durch die Bilder dieser Geraden begrenzt.

Wegen $T(-i) = M_3 = 5+5i$ wird die obere Halbebene ($\operatorname{Im}(z) > 0$) auf die untere Halbebene ($\operatorname{Im}(z) < 0$) abgebildet.

Wegen $T(-i) = M_3 = 5+5i$ wird der Bereich links von g_2 ($\operatorname{Re}(z) < 4$) auf das Äußere von K_2 ($|z-1| > 1$) abgebildet.

Wegen $T(4) = 2$ wird der Bereich rechts von g_3 ($\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)$) auf das Innere von K_3 ($|z-5-5i| < 5\sqrt{2}$) abgebildet.





Aufgabe 2)

Gegeben sei die Abbildung

$$\widetilde{f}(z) = \frac{z^2+1}{(z+i)(z^2-7z+12)} \ .$$

a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von $\widetilde{f}$ und klassifizieren Sie diese.

b) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten von $\widetilde{f}$.

c) Bestimmen Sie die komplexe Partialbruchzerlegung der Abbildung

$$f(z) = \frac{z-i}{z^2-7z+12} \ .$$

d) Bestimmen Sie diejenige Laurent-Reihe von f mit dem Entwicklungspunkt $z_0 = i$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = \pi$ gegen f konvergiert.

e) Berechnen Sie das Integral

$$\int_c f(z)dz \quad , \qquad c(t) = \pi e^{2it} \ , \ t \in [0, 2\pi].$$

Lösugsskizze zur Aufgabe 2)

a) **(3 Punkte)** Nennernullstellen: $z_1 = -i$ und $z^2 - 7z + 12 = (z-4)(z-3) = 0 \iff z_2 = 3, \ z_3 = 4$.

$$\widetilde{f}(z) \ = \ \frac{(z+i)(z-i)}{(z+i)(z^2-7z+12)} \ = \ \frac{z-i}{z^2-7z+12} \ =: \tilde{f}(z) \qquad \forall z \neq z_1 = -i \,.$$

In z_1 liegt eine hebbare Singularität vor und in z_2 und z_3 liegen Pole erster Ordnung vor.

b) **(2 Punkte)**

$Res\,\widetilde{f}(-i) = 0\,,$

$$Res\widetilde{f}(3) \ = \ \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{z-i}{(z-3)(z-4)} \ = \ \frac{3-i}{3-4} \ = \ -3+i\,.$$

$$Res\widetilde{f}(4) \ = \ \lim_{z\to 4}(z-4)f(z) = \lim_{z\to 4}(z-4)\frac{z-i}{(z-3)(z-4)} \ = \ \frac{4-i}{4-3} \ = \ 4-i\,.$$

c) **(1 Punkt)** Komplexe Partialbruchzerlegung von f.

$$f(z) = \frac{4-i}{z-4} - \frac{3-i}{z-3}.$$

d) **(3 Punkte)** $z_0 = i$. Laurentreihe im Ring

$$|3-i| \;<\; |z-i| \;<\; |4-i|$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-3} &= \frac{1}{(z-i)-(3-i)} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{3-i}{z-i}} = \frac{1}{z-i}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3-i)^k}{(z-i)^k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(3-i)^k\,(z-i)^{-k-1} = \sum_{k=-\infty}^{-1}(3-i)^{-k-1}\,(z-i)^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-4} &= \frac{1}{(z-i)-(4-i)} = \frac{-1}{4-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{4-i}} = \frac{-1}{4-i}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{(4-i)^k}\\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{(4-i)^{k+1}}\,.\end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{4-i}{z-4} - \frac{3-i}{z-3} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{(4-i)^k} - \sum_{k=-\infty}^{-1}(3-i)^{-k}\,(z-i)^k\,.$$

e) **(1 Punkt)**

$$\int_c f(z)dz \quad = 2\cdot 2\pi i\cdot Resf(3) \;=\; 4\pi i\cdot(-3+i) = \; -4\pi - 12\pi i\,.$$