Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2012**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint_c \frac{1}{z+2}\,dz, \qquad c: \; |z+1-i| \;=\; 1,$

b) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{z^2-2z+2}{z^3-z^2+2}\,dz, \qquad c_1: \; |z| \;=\; 0.5, \quad c_2: \; |z| \;=\; 1.5,$

c) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz, \qquad c_1: \; |z+2| \;=\; 2, \quad c_2: \; |z-1.5| \;=\; 2,$

d) $\displaystyle\oint_c \frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}\,dz, \qquad c: \; |z-i| \;=\; 3,$

e) $\displaystyle\oint_c z^2+\frac{e^z}{z^2}\,dz, \qquad c: \; |z| \;=\; \pi,$

f) $\displaystyle\oint_c \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\,dz, \qquad c: \; |z-1-2i| \;=\; 2.$

Aufgabe 18:

Gegeben sei die durch

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$$

definierte Funktion f. Berechnet werden soll die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (*)$$

mit Konvergenzradius r. Dazu berechne man die Koeffizienten a_n auf verschiedene Weise:

a) $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

b) Unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe.

c) Über eine Rekursionsformel, die entsteht, wenn man nach Multiplikation von $(*)$ mit dem Nenner von f einen Koeffizientenvergleich durchführt (Cauchy-Produkt).

Man bestätige, dass die in a) - c) ermittelten Koeffizienten identisch sind, ggf. durch einen Induktionsbeweis.

Aufgabe 19:

Man gebe alle Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

zum Entwicklungspunkt

$$\text{a)} \quad z_0 = 2 \quad \text{und} \quad \text{b)} \quad z_0 = -1$$

mit Konvergenzbereich an.

Aufgabe 20:

Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten a_{-1} der Reihe an:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad f(z) &= \frac{\exp(z-2)}{z-2} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 2, \\
\text{b)} \quad f(z) &= z^2 \cosh\left(\frac{1}{z+1}\right) \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = -1\,, \\
\text{c)} \quad f(z) &= \frac{z - \sin z}{z^7} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 0\,.
\end{aligned}$$

Abgabetermin: 18.6.-22.6 (zu Beginn der Übung)