Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2012**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

a) Man überprüfe, welche der folgenden Funktionen holomorph in $\mathbb{C}$ sind:

(i) $f(z) = z \sin z$,

(ii) $f(z) = \mathrm{Re}\,(e^z)$,

(iii) $f(z) = z + |z|$,

(iv) $f(z) = (\bar{z})^2$.

b) Man zeige, dass

$$u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2x^2 - 2y^2 + 1$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x,y)$, d.h. eine Funktion v , für die die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 10:

Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = t$ für $t > 0$ und $c_2(t) = 4e^{it}$ für $-\pi < t < \pi$.

a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z-Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.

b) In welche Bildkurven der w-Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \sqrt{z}$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

Aufgabe 11:

a) Man skizziere die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} | |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von K_1 und K_2 unter T, wenn noch $T(0) = 1$ gilt.

Aufgabe 12:

Gegeben sei eine ebene, stationäre, wirbel- und quellenfreie Umströmung eines Zylinders mit dem Querschnitt $|z| \leq 3$ und der konstanten Geschwindigkeit $v_\infty > 0$ im Unendlichen.

a) Man bilde den Bereich $|z| > 3$ der z-Ebene mit einer Joukowski-Funktion $w = f(z)$ in die Modellebene $\mathbb{C} \backslash [-1, 1]$ ab und berechne $f'(z)$.

b) Man berechne das komplexe Strömungspotential Φ für $|z| > 3$.

c) Man bestimme das Geschwindigkeitsfeld in der z-Ebene und gebe die Punkte mit maximaler und minimaler Geschwindigkeit an.

d) Man zeichne die Höhenlinien der Stromfunktion in der z-Ebene für $v_\infty = 1$ mit $z = x + iy$ und $x, y \in [-5, 5]$.

Abgabetermin: 14.5.-18.5 (zu Beginn der Übung)