Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2012**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \dfrac{(1+2i)^2}{2-i}$ und $z_2 := \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^6.

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w+z_2)^3 = 1$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{w \in \mathbb{C} : |w+z_2|^3 = |8i|\}$, mit $z_2 := \sqrt{3} - i$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2}\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : 9\mathrm{Re}(z^2) + 13(\mathrm{Im}(z))^2 = 36\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : 3\pi/2 < \arg(zi) < 2\pi \,,\, 0 < |z|\}$.

Aufgabe 3:

a) Man untersuche die Folge

$$z_0 = 3\,, \quad z_{n+1} = \frac{3-2i}{4}\,(1+2i+z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

b) Für eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeige man die folgende Äquivalenz:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z^*) \,\wedge\, \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z^*)\,.$$

c) Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$ zeige man die folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist stetig in } z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : D \to \mathbb{R} \text{ sind stetig in } z_0\,.$$

Aufgabe 4:

a) Man bestimme das Bild von $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1\,,\ 0 \le \mathrm{Im}(z) \le 1\}$ unter der durch $f(z) = iz^2 + 2$ definierten Abbildung.

b) Gegeben seien $z_1 = 3 + \dfrac{\pi i}{4}$ und $z_2 = 1 - \dfrac{\pi i}{2}$. Man berechne

$$\exp(z_1)\,,\ \exp(z_2) \quad \text{und} \quad \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der e-Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)\,.$$

Abgabetermin: 16.4.-20.4 (zu Beginn der Übung)