Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2011**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7

Aufgabe 1: Bitte bewerten Sie folgende Aussagen. Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben ,,w" (für wahr) oder ,,f" für falsch ein.

a) Gegeben sei die Funktion $f(z) = \dfrac{z^2+8z+15}{(z^2-25)(z^2+4)}$.

☐ f besitzt die einfachen Pole -5, 5, -2i und 2i.

☐ Es gilt $Res\, f(2i) + Res f(-2i) = -8/29$.

☐ Es gilt $Res\, f(5) + Res f(-5) = -8/29$.

☐ Es gilt $\displaystyle\int_{|z|=8} f(z)dz = -32\pi i/29$.

b) Die komplexe Partialbruchzerlegung von $f(z) = \dfrac{z^2+8z+15}{(z^2-25)(z^2+4)}$ lautet

☐ $f(z) = \dfrac{8}{29(z-5)} + \dfrac{Res\, f(2i)}{z-2i} + \dfrac{Res\, f(-2i)}{z+2i}$

☐ $f(z) = \dfrac{-8}{29(z+5)} + \dfrac{8}{29(z-5)} + \dfrac{Res\, f(2i)}{z-2i} + \dfrac{Res\, f(-2i)}{z+2i}$

☐ $f(z) = \dfrac{8}{29(z-5)} + \dfrac{Res(-5)}{(z+5)} + \dfrac{Res\, f(2i)}{z-2i} + \dfrac{Res\, f(-2i)}{z+2i}$

☐ $f(z) = \dfrac{Res(5)}{(z-5)} + \dfrac{11i-16}{116(z-2i)} + \dfrac{Res\, f(-2i)}{z+2i}$

c) Die Funktion $g(z) = \dfrac{2z^4+3z^3+3}{z^3+z^4}$

☐ hat in $z_0 = 0$ einen Pol dritter Ordnung.

☐ hat in $z = -1$ eine hebbare Singularität.

☐ Es gilt $Res\, g(0) = 3$.

☐ Es gilt $Res\, g(-1) = -2$

d) Gegeben sei die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}$. Dann gilt (wenn die angegebenen Kurven jeweils einmal positiv durchlaufen werden)

- ☐ $\displaystyle\int_{|z|=\pi/2} f(z)dz = -\pi i/3\,.$
- ☐ $\displaystyle\int_{|z|=\pi} f(z)dz = -\pi i/3\,.$
- ☐ $\displaystyle\int_{|z|=2\pi} f(z)dz = 0\,.$
- ☐ $\displaystyle\int_{|z|=\pi/4} f(z)dz = 0\,.$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die komplexe Partialbruchzerlegung der Funktionen

a) $f(z) = \dfrac{1 + z - z^2 + iz^3}{z^2(z+i)}$, **b)** $g(z) = \dfrac{2 + 3z + z^2}{(z^2+4)(z^2-1)}$,

c) $q(z) = \dfrac{z^3+3}{z^3+z^4}$.

Was hätten Sie in Analysis II als Partialbruchzerlegung von g erhalten?

Aufgabe 3: Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuenkalküls.

a) $f(z) := \dfrac{1}{z^4+16}$.

i) $\displaystyle\oint_{|z-2|=2} f(z)\,dz$, **ii)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+16}\,dx$.

b) $g(z) := \dfrac{z^2+2z}{z^{\frac{4}{3}}(z^3+2z^2+4z+8)}$.

i) $\displaystyle\oint_{|z-3i|=2} g(z)\,dz$, **ii)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+2x}{x^{\frac{4}{3}}(x^3+2x^2+4x+8)}\,dx$

Aufgabe 4: (Klausur Hinze/Kiani, SoSe09, Aufg.2)

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos(\omega x)}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx$, $\omega \in \mathbb{R}^+$.

b) Gegeben sei $f(z) = \dfrac{1}{z^2-4z+5}$.

(i) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f.

(ii) Berechnen Sie
$$\oint_C f(z)\,dz\,, \qquad C:\,[0,2\pi] \to \mathbb{C},\ C(t) = (2+2i) + 2\,e^{-it}.$$

(iii) Bestimmen Sie diejenige Laurent–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2+i$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = 2$ gegen $f(z)$ konvergiert.

Abgabetermin: 5. Juli 2011.