Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2011**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 1: Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale. Die angegebenen Kurven sollen einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

a) $\displaystyle\int_{C_k} \frac{e^z}{(z-2i)^5}\,dz\,, \qquad k=1,2\,, \quad C_1\,:\,|z-1|=2, \quad C_2: |z-i|=2\,,$

b) $\displaystyle\int_{C} \frac{\cos^2(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^4}\,dz \qquad C\,:\,|z-1|=1\,,$

c) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\cos(z)}{z^{4k+1}}\,dz \qquad C\,:\,|z|=1\,, \qquad k\in\mathbb{N}\,,$

d) $\displaystyle\int_{C} \frac{e^{\pi z}}{z^3-iz^2}\,dz \qquad C\,:\,|z|=2\,,$

Aufgabe 2:

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(z) := \frac{e^z-1}{e^z+e^{-z}}\,, \qquad g_1(z) := \frac{1}{\ln(3-z)}\,, \qquad g_2(z) := \frac{1}{\ln(\frac{i}{2}-4-z)}.$$

Bestimmen Sie (ohne die Reihen zu berechnen) die Radien der größten Kreise um Null, in denen die Taylorreihen von f, g_1 bzw. g_2 mit Entwicklungspunkt Null gegen f, g_1 bzw. g_2 konvergieren.

b) Wie viele verschiedene Laurentreihen gibt es für die folgenden Funktionen zu den jeweils angegebenen Entwicklungspunkten z_0?

Bestimmen Sie jeweils diejenige Laurentreihe die im Punkt $z=2$ gegen $f(2)$ konvergiert.

(i) $\displaystyle f(z) = \frac{3z-5}{z^2-2z-3}\,, \qquad z_0=0\,,$

(ii) $f(z) = \dfrac{\sin(z) - 1}{z^2}\,, \qquad z_0 = 0\,,$

(iii) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3}\,, \qquad z_0 = i\,.$

Aufgabe 3: Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen.

a) $f(z) = z^3 \cos(\frac{1}{z})$ b) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2+z-2}$

c) $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^3}$ d) $f(z) = \dfrac{\cos(z)-1}{z^2(1-z^2)}$

e) $f(z) = \cosh(\frac{1}{z})$

Aufgabe 4: (Klausur SoSe07, Aufg.2, leicht modifiziert)

Gegeben sei

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{(z-i)^2}\,.$$

a) Klassifizieren Sie die Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie – sofern definiert – folgende Integrale, wobei die angegebenen Kreise einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden sollen.

(i) $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} f(z)\,dz\,,$

(ii) $\displaystyle\oint_{|z+i|=2} f(z)\,dz\,,$

(iii) $\displaystyle\oint_{|z+i|=3} f(z)\,dz\,.$

c) Bestimmen Sie die ersten beiden Terme der Taylor–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. (D.h. bis zum linearen Term).

d) Bestimmen Sie die Laurent–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_1 = i$.

Hinweis : Additionstheorem von $\sin(z) = \sin[(z-i)+i]$.

Abgabetermin: 21. Juni 2011.