Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2011**
Prof. Dr. H. J. Oberle, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Bilder der Mengen D_k unter den angegebenen Funktionen f_k für $k = 1, 2, 3$. Skizzieren Sie die Definitionsmengen D_k und deren Bildmengen $f_k(D_k)$.

a) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\,(z)| \le 1, |\mathrm{Im}\,(z)| \le 1\}, \quad f_1(z) = 2e^{i\pi/4}z,$

b) $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2, |\mathrm{Re}\,(z)| < \mathrm{Im}\,(z)\}, \quad f_2(z) = z^2,$

c) $D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 2\}, \quad f_3(z) = \dfrac{1}{z}.$

Aufgabe 2:

a) Überprüfen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$:

$$e^{\overline{z}} = \overline{e^z} \qquad \text{und} \qquad \sin(\overline{z}) = -\overline{\sin z}\,.$$

b) Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichung für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ nach:

$$\cosh(z) = \cosh(x)\,\cos(y) + i\,\sinh(x)\sin(y)\,.$$

c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $\cosh(z) = 0 + i\,\dfrac{3}{4}$.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass alle 19 (warum nicht 20?) Lösungen der Gleichung

$$(z-4)^{20} = z^{20}$$

auf der Geraden $\mathrm{Re}\,(z) = 2$ liegen.

b) Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Keil
$\left\{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\phi}, r \in [0, \infty), -\dfrac{\pi}{2} < \phi < -\dfrac{\pi}{6}\right\}$
auf die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ abbildet.

c) Durch $L := \{\, z \in \mathbb{C} : |z - i| \cdot |z + i| = 1 \,\}$ sind diejenigen Punkte der komplexen Zahlenebene gegeben, deren Abstände von den Punkten $+i$ und $-i$ das Produkt 1 haben. Es handelt sich um eine sogenannte Lemniskate. Zeigen Sie, dass das Bild der Lemniskate L unter der Abbildung $(x + iy) = z \to z^2 =: w =: u + iv$ ein mehrfach durchlaufener Kreis ist.

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen

i) $e^z = 4\,,$ ii) $e^z = 2 + 2i\,.$

b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $(z-1)^i = z^i$?

c) Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$\ln(-z) \neq \ln(z)$ gilt.

d) Was ist falsch an folgender Argumentation von Johann Bernoulli:

$$(-z)^2 = z^2 \iff \ln((-z)^2) = \ln(z^2)$$
$$2\ln(-z) = 2\ln(z) \iff \ln(-z) = \ln(z)\,?$$

Abgabetermin: 19. April 2011.