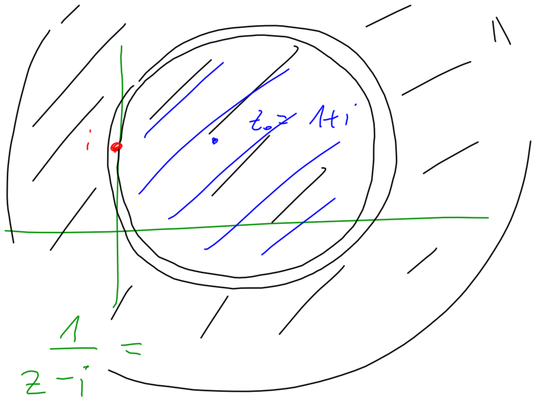
Vo Kompl. Fkt n. 18.6.10



$$\frac{1}{z-i} =$$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-(1+i)+1+\cancel{i}-\cancel{i}} =$$

$$= \frac{1}{1+(z-(1+i))} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(z-(1+i)\right)^k$$

$$\underline{\underline{|z-(1+i)|<1}}$$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-(1+i)} \; \frac{1}{\frac{1}{z-(1+i)}+1} =$$

$$= \ldots =$$

$$= \sum_{k=-1}^{-\infty} (-1)^{k-1} \left(z-(1+i)\right)^k$$

$$\underline{|z-(1+i)|>1}$$

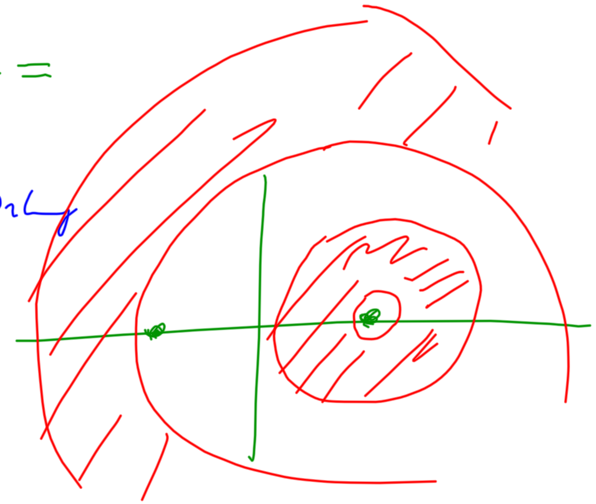
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} \quad \text{ist LR}$$

$z_0 = 1$ Pol 1. O.

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \quad \text{LR}$$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} =$$

$z_0 = \pm 1$ Pol 1. Ordg



$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)+1+1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(z-1)^k}{2^k}$$

LR

$z_0 = 1$

$$\frac{4}{z-1} = \frac{4}{(z+1)-1-1} = \frac{4}{-2+(z+1)} =$$

$$= -2 \, \frac{1}{1-\left(\frac{z+1}{2}\right)} =$$

$$= -2 \left(1 + \frac{z+1}{2} + \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \ldots\right)$$

$$\frac{4}{(z+1)^2} = \frac{4}{(z-1+1+1)^2} =$$

$$= \frac{4}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}\right)^2 =$$

$$= \left(1 - \frac{z-1}{2} + \ldots\right)^2 =$$

$$= \left(1 - 2\,\frac{z-1}{2} + \ldots\right.$$

$$= 1 - (z-1) + \ldots$$

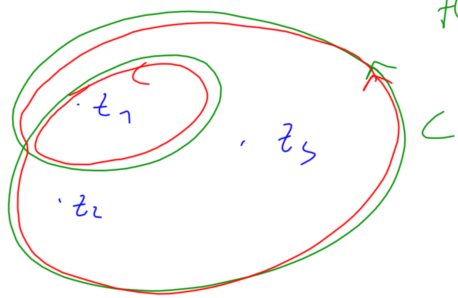
$$\oint f(z)\,dz = 0$$

f kompl. diffbar

$$\oint \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$$

$$\oint \frac{1}{(z-z_0)^k}\,dz = 0 \qquad k>1$$

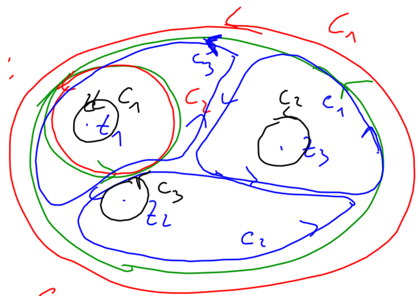
Residuensatz



f(z) habe isol. Sing. bei z_1, z_2, z_3

$$\oint f(z)\,dz = 2\,\mathrm{Res}(f,z_1) + \mathrm{Res}(f,z_2) + \mathrm{Res}(f,z_3)$$

ad Beweis:



$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} =$$

$$= \oint_{c_1} + \oint_{c_2} + \oint_{c_3} + \oint_{C_2} = (*)$$

$$\oint_C = \oint_c$$

$$(*) = 2\oint_{c_1} + \oint_{c_2} + \oint_{c_3}$$

Mit der Laurent–Entwicklung um z_k gilt aber

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{|z-z_k|=\rho_k} f(z)\,dz &= \oint\limits_{|z-z_k|=\rho_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_k)^j\,dz \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \cdot \oint\limits_{|z-z_k|=\rho_k} (z-z_k)^j\,dz \\
&= 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\,(f; z_k)
\end{aligned}
$$

Für die Kurve in der Beweisskizze erhält man also

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{c} f(z)\,dz &= 2\pi i \cdot [2\mathrm{Res}\,(f; z_1) + \mathrm{Res}\,(f; z_2) \\
&\quad + \mathrm{Res}\,(f; z_3) + 2\mathrm{Res}\,(f; z_4) + 2\mathrm{Res}\,(f; z_5)]
\end{aligned}
$$

Satz: (Fortsetzung)

3) Gilt $f(z) = g(z)/(z-z_0)^m$, $m \geq 1$ mit einer in einer Umgebung von z_0 holomorphen Funktion $g(z)$, so gilt

$$\text{Res}\,(f; z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

$m=1$

$\text{Res}(f, z_0) = g(z_0)$

Beweis:

Die erste Aussage ist ein Spezialfall von Teil 3), der über Taylor–Entwicklung bewiesen werden kann, da $g(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph ist:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-m}$$

Man kann dann direkt das Residuum ablesen und es folgt

$k = m-1$

$k-m = -1$

$$a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \text{Res}\,(f; z_0)$$

Beweis: (Fortsetzung)

Für Teil 2) definieren wir

$$q(z) =: (z - z_0)r(z)$$

Dann ist $r(z)$ im Punkt z_0 holomorph fortsetzbar mit $r(z_0) \neq 0$.

Damit ist die Funktion

$$g(z) = \frac{p(z)}{r(z)}$$

bei $z = z_0$ holomorph und wir erhalten für $f(z)$ die Darstellung

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

Nach Teil 1) folgt wegen $q'(z) = r(z) + (z - z_0)r'(z)$ $q'(z_0) = r(z_0)$

$$\text{Res}\,(f; z_0) = g(z_0) = \frac{p(z_0)}{r(z_0)}$$

gesucht $g(z_0) = \frac{p(z_0)}{r(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

129

Beispiel: Für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

hat man nach Teil 1) des letzten Satzes

$$\text{Res}\,(f; -1) = \left.\frac{1}{z-2}\right|_{z=-1} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Res}\,(f; 2) = \left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=2} = \frac{1}{3}$$

$f(z) = \dfrac{\frac{1}{z-2}}{(z+1)}$, $\frac{1}{z-2} = g(z)$

$f(z) = \dfrac{\frac{1}{z+1}}{z-2}$, $\frac{1}{z+1} = g(z)$

Beispiel: Für

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

$q'(z) = 2z$

gilt nach 2)

$$\text{Res}\,(f; i) = \left.\underbrace{\frac{1}{2z}}_{\frac{p(z)}{q'(z)}}\right|_{z=i} = \frac{1}{2i}, \qquad \text{Res}\,(f; -i) = \left.\underbrace{\frac{1}{2z}}_{\frac{p(z)}{q'(z)}}\right|_{z=-i} = -\frac{1}{2i}$$

130