Vo Kompl. Fktn 14.5.10

$\bar{z} = x - iy = 2x - x - iy = 2x - \underbrace{z}_{}$

$\rightsquigarrow$ (kompl.) diff

nicht kompl. diffb.

$\Downarrow$

$\bar{z}$ nicht kompl. diffb.

$n=2 \qquad \int_C f(x)\,dx = \int_a^b \langle f(c(t)), \dot{c}(t) \rangle \, dt$

$= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} u(c(t)) \\ v(c(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$

reelles KI 2. Art

$= \int_a^b (u\dot{c}_1 + v\dot{c}_2)\, dt$

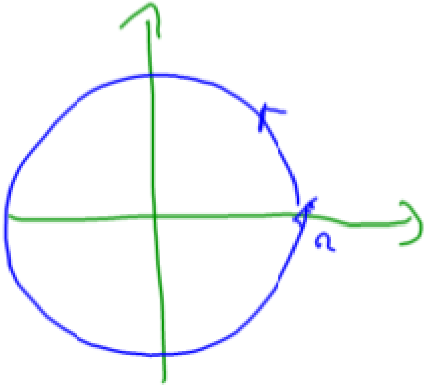
Komplex

$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(c(t))\,\dot{c}(t)\,dt$

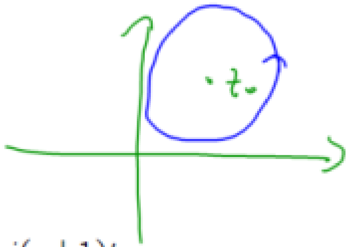
$= \int_a^b \left[(u\dot{c}_1 - v\dot{c}_2) + i(u\dot{c}_2 + v\dot{c}_1) \right] dt$

Beispiel 1: $\dot{c}(t) = i r e^{it}$

Sei $f(z) = z$ und $c(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt



$$
\begin{aligned}
\oint_c z\,dz &= \int_0^{2\pi} re^{it} \cdot (rie^{it})\,dt \\
&= ir^2 \int_0^{2\pi} e^{2it}\,dt \\
&= ir^2 \int_0^{2\pi} (\cos(2t) + i\,\sin(2t))\,dt \\
&= -r^2 \int_0^{2\pi} \sin(2t))\,dt + i\,r^2 \int_0^{2\pi} \cos(2t))\,dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$



Beispiel 4: (Fortsetzung)

$$\oint_C (z-z_0)^n\,dz = \int_0^{2\pi} \left(re^{it}\right)^n \cdot \left(rie^{it}\right) dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt$$

$$= r^{n+1}\left(-\int_0^{2\pi} \sin((n+1)t))\,dt + i\int_0^{2\pi} \cos((n+1)t))\,dt\right)$$

$$= \begin{cases} 2\pi i & : \text{ für } n=-1 \\ 0 & : \text{ für } n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\} \end{cases}$$

Nur für $n=-1$ verschwindet das Integral nicht und es gilt

$$\oint_x \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$$

Frage: Woran liegt das?

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt sofort

$$\left| \int_c R_n(z)\, dz \right| \leq \varepsilon \cdot L(c)$$

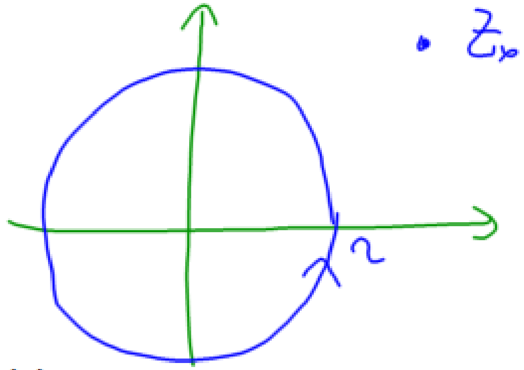
und damit

$$\lim_{n \to \infty} \int_c R_n(z)\, dz = 0$$

Beispiel:

Sei $c(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ und $|z_0| > r$. Dann gilt:

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z - z_0}\, dz = 0$$



Beachte: Der Punkt z_0 liegt außerhalb des Kreises $c(t)$.

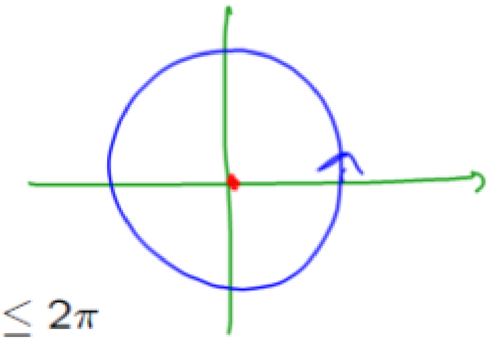
Bemerkung:
Alle drei **(fett gedruckten)** Voraussetzungen sind wichtig und zusammen hinreichend:

1) Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist **nicht** holomorph und es gilt:

$$\oint_{|z|=1} \bar{z}\, dz \neq 0$$

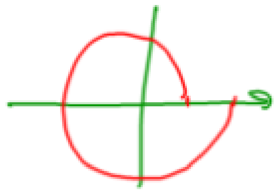
2) Das Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z \neq 0\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend und es gilt:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz \neq 0$$

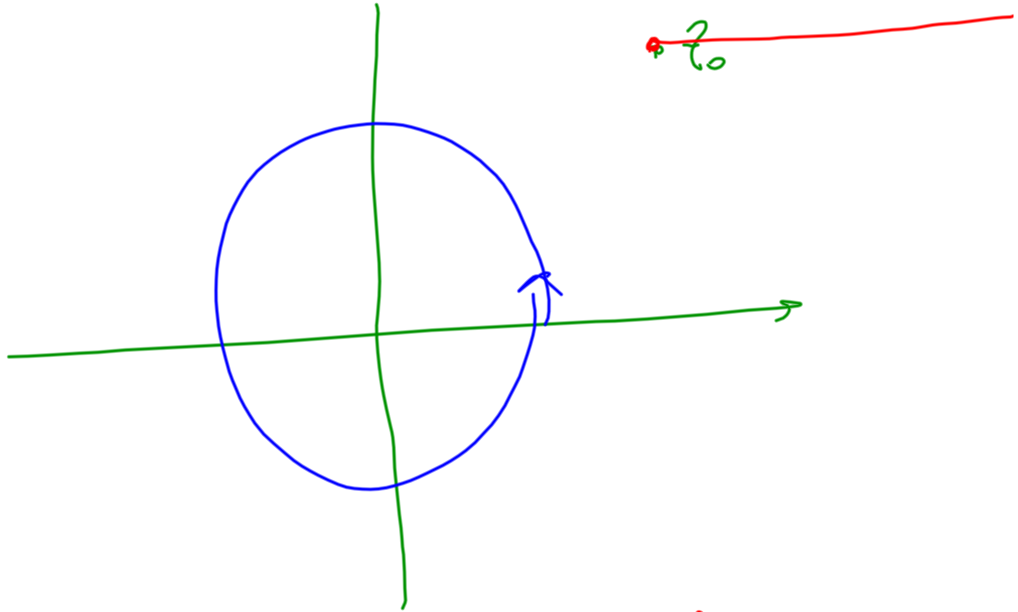


3) Die Kurve c ist **nicht** geschlossen und es gilt:

$$\int_c z\, dz \neq 0, \quad c(t) = e^{(1+i)t}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$



$$G = \mathbb{C} \setminus \{x + iy_0 \mid x \geq x_0\}$$

Beweis des Cauchyschen Integralsatzes:

Wir setzen $c(t) = (x(t), y(t))^T$ und $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$:

$$\int_c f(c(t))\,\dot c(t)\,dt = \oint_c f(z)\,dz = \int_a^b (u\dot x - v\dot y)\,dt + i\int_a^b (u\dot y + v\dot x)\,dt = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}, \overbrace{\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix}}^{\dot c} \right\rangle dt + i$$

$$= \oint_c \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} d\mathrm{x} + i\oint_c \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} d\mathrm{x} \qquad \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix}}_{\dot c} \right\rangle dt =$$

Bei beiden Vektorfelder $(u, -v)^T$ und $(v, u)^T$ ist wegen der CR–DGL's die Integrabilitätsbedingung erfüllt:

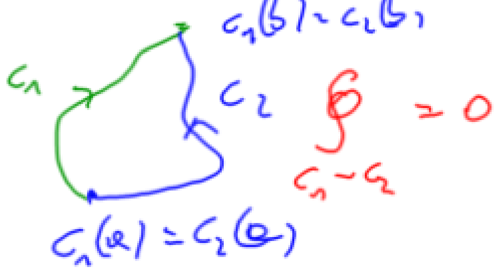
KI 2. Art

$$\text{rot}\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = u_y + v_x = 0, \quad \text{rot}\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = v_y - u_x = 0$$

Daher existiert ein **Potential** und beide Integrale sind wegen der **geschlossenen Kurve** c identisch gleich Null.

Korollar: Ist $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f(z)$ holomorph auf G und $c_1, c_2 : [a,b] \to G$, so folgt aus $c_1(a) = c_2(a)$ und $c_1(b) = c_2(b)$ direkt

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_{c_2} f(z)\, dz$$



d.h. das Integral $\int_c f(z)\, dz$ ist **wegunabhängig**.

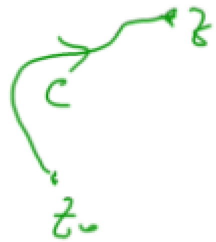
Satz: **(Existenz einer Stammfunktion)**

Sei $G \subset \mathbb{C}$, $f(z)$ holomorph auf G, $z_0 \in G$ ein fester Punkt und setze für $z \in G$

$$F(z) := \int_{c_z} f(\xi)\, d\xi$$

mit einer beliebigen stückweisen C^1–Kurve, die z_0 und z verbindet. Dann ist $F(z)$ eine **Stammfunktion** von $f(z)$, d.h. es gilt

$$F'(z) = f(z)$$



$z \longrightarrow z+h$ $\qquad c(t) = z_0 + th,\ t \in [0,1] \qquad c'(t) = h$

Beweis:

Es gilt

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)h\,dt$$

$$= \int_0^1 f(z+th)\,dt$$

$$f(z) = \int_0^1 f(z)\,dt$$

Daraus folgt

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\int_0^1 (f(z+th)-f(z))\,dt\right|$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} |f(z+th)-f(z)| \to 0$$

für $h \to 0$.

Korollar:

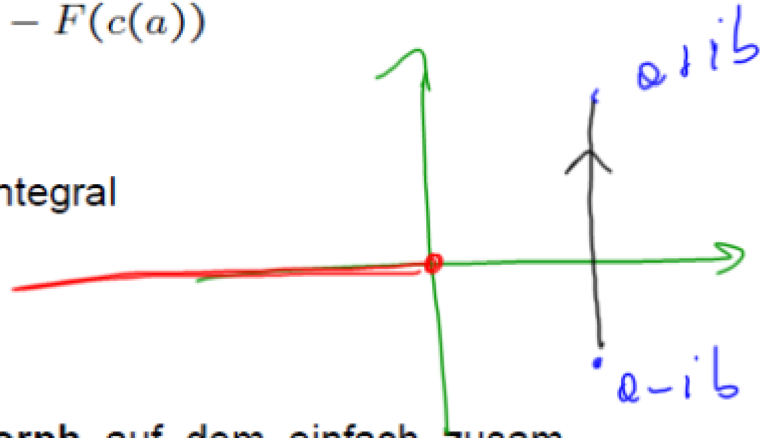
Ist $f(z)$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G holomorph und $F(z)$ eine Stammfunktion von $f(z)$, so gilt für alle stückweisen C^1–Kurven $c : [a, b] \to G$

$$\int_c f(z)\,dz = F(c(b)) - F(c(a))$$

Beispiel:

Wir betrachten mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ das Integral

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{dz}{z^2}$$



Die Funktion $f(z) = 1/z^2$ ist **holomorph** auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G mit

$$G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

$c(t) = a + it \qquad t \in [-b, b]$

$\dot{c}(t) = i$

87

e.t.

Bemerkung:

Anstelle des einfachen Zusammenhangs genügt es, im Cauchyschen Integralsatz zu fordern, dass c **nullhomotop** ist, d.h. sich in G stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

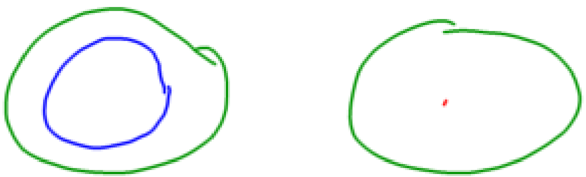
Der Begriff **homotope** Wege wird auf Folie erklärt.

Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz:

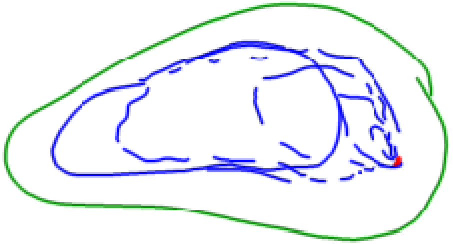
Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet G. Dann gilt für zwei geschlossene Wege c und $\tilde{c}$:

$$c, \tilde{c} \text{ homotop} \quad \Rightarrow \quad \oint_c f(z)\,dz = \oint_{\tilde{c}} f(z)\,dz$$

n. e.t.



e.z.



Bemerkung:

Anstelle des einfachen Zusammenhangs genügt es, im Cauchyschen Integralsatz zu fordern, dass c **nullhomotop** ist, d.h. sich in G stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

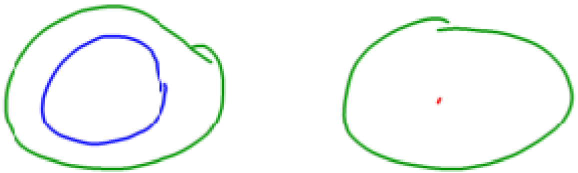
Der Begriff **homotope** Wege wird auf Folie erklärt.

Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz:

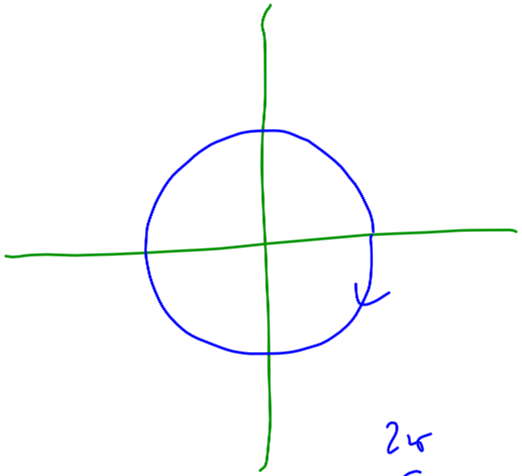
Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet G. Dann gilt für zwei geschlossene Wege c und $\tilde{c}$:

$$c, \tilde{c} \text{ homotop} \quad \Rightarrow \quad \oint_c f(z)\,dz = \oint_{\tilde{c}} f(z)\,dz$$

n. e.z.



89

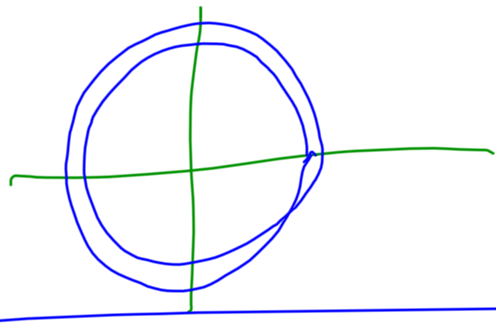


$c(t) = r e^{-it}$

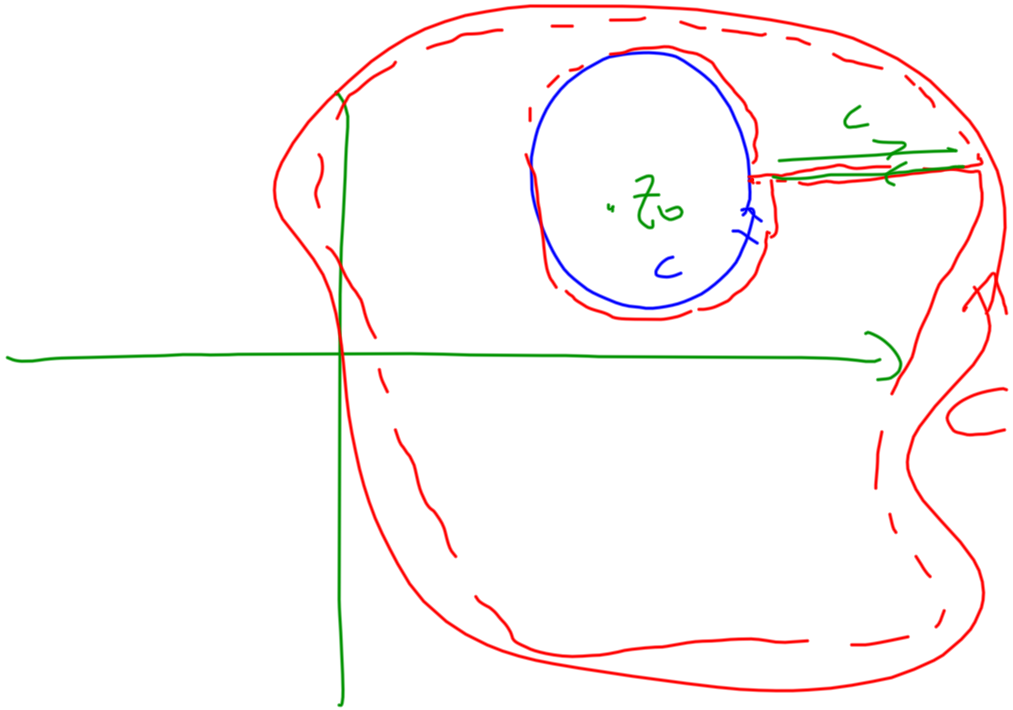
$\dot{c}(t) = -i r e^{-it}$

$$\oint z\,dz = \int_0^{2\pi} r e^{+it} (-i) r e^{-it}\,dt =$$

$$= -i r^2 \int_0^{2\pi} e^{+2it}\,dt = -2\pi i r^2$$



$$\oint z\,dz = \dots = 4\pi i$$



$$\oint \frac{1}{z-z_0} = 2\pi i$$

$$\oint \frac{1}{z-z_0} = 2\pi i$$

$$\oint_C = \underbrace{\oint_{C}}_{=0} - \underbrace{\oint_{C}}_{=0} - \oint_{C}$$