Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2010**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Für die folgenden Funktionen

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} & f(z) = \dfrac{1}{z^4+z^2}, & & \text{b)} & f(z) = \sin\dfrac{1}{z}, \\ \text{c)} & f(z) = \dfrac{z-\sin z}{z^2}, & & \text{d)} & f(z) = \coth z \end{array}$$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten drei (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z_0 = 0$, die für große z konvergiert.

Aufgabe 22:

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{20}{z^4 + 8z^3 + 20z^2 + 32z + 64}\,.$$

a) Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von f.

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c f(z)\,dz$$

für den Kreis $c:\ |z+4-2i| = 5\,.$

Aufgabe 23:

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^6+2x^5+2x^4-x^2-2x-2}\, dx,$$

b) $$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+4}\, dx \qquad \text{und}$$

c) $$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x(x^3+1)\sqrt{x^3-1}}\, dx\ .$$

Aufgabe 24:

Mittels Residuenkalkül berechne man die folgenden Integrale:

a) $$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos\varphi}\, d\varphi\ ,$$

b) $$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2+\sin(2\varphi)}\, d\varphi\ .$$

Hinweis: Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ bzw. $\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$.

Abgabetermin: 6.7.-8.7. (zu Beginn der Übung)