Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2010**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint_c \frac{1}{z-i}\,dz, \quad c:\ |z-1| \ =\ 1,$

b) $\displaystyle\oint_c \frac{\sin z}{z+\pi/2}\,dz, \quad c:\ |z+\pi+i| \ =\ 2,$

c) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{z^2-2z+2}{z^3-z^2+2}\,dz, \quad c_1:\ |z| \ =\ 0.5, \quad c_2:\ |z| \ =\ 1.5,$

d) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{z^3}{z^2-iz+6}\,dz, \quad c_1:\ |z| \ =\ 2.5, \quad c_2:\ |z-i| \ =\ 2.5,$

e) $\displaystyle\oint_c z^2+\frac{e^z}{z^2}\,dz, \quad c:\ |z| \ =\ \pi,$

f) $\displaystyle\oint_c \frac{z^4}{(z-i)^3}\,dz, \quad c:\ |z-i| \ =\ 3\,.$

Aufgabe 18:

Gegeben sei die durch

$$f(z)=\frac{3-2z}{z^2-2z+1}$$

definierte Funktion f. Berechnet werden soll die Taylor-Reihe

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (*)$$

mit Konvergenzradius r. Dazu berechne man die Koeffizienten a_n auf verschiedene Weise:

a) $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

b) Unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe.

Tipp: Partialbruchzerlegung von f .

c) Über eine Rekursionsformel, die entsteht, wenn man nach Multiplikation von $(*)$ mit dem Nenner von f einen Koeffizientenvergleich durchführt (Cauchy-Produkt).

Man bestätige, dass die in a) - c) ermittelten Koeffizienten identisch sind, ggf. durch einen Induktionsbeweis.

Aufgabe 19:

Man gebe **alle** Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{5z}{z^2 + z - 6}$$

zum Entwicklungspunkt

$$\text{a)} \quad z_0 = i, \qquad \text{b)} \quad z_0 = -3$$

an. Wo konvergieren die Reihen jeweils?

Aufgabe 20:

Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten a_{-1} der Reihe an:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad f(z) &= \frac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^2} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 0 \,, \\
\text{b)} \quad f(z) &= z \sin\left(\frac{1}{z+\pi}\right) \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = -\pi \,, \\
\text{c)} \quad f(z) &= \frac{\cos z}{z^5} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 0 \,.
\end{aligned}$$

Abgabetermin: 22.6.-24.6 (zu Beginn der Übung)