**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2010**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. K. Rothe

# Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 3

**Aufgabe 9:**

a) Man überprüfe, welche der folgenden Funktionen holomorph in $\mathbb{C}$ sind:

(i) $f(z) = z^2 \cos z$ ,

(ii) $f(z) = \text{Im}\,(z^3)$ ,

(iii) $f(z) = \exp(\bar{z})$ ,

(iv) $f(z) = z + \bar{z} + 1$ .

b) Man zeige, dass

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + x + 1$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu $u$ konjugiert harmonische Funktion $v(x,y)$, d.h. eine Funktion $v$, für die die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

**Aufgabe 10:**

Es sei $z = re^{i\varphi}$ und $g(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$.

a) Man zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten die Gestalt

$$ru_r = v_\varphi \, , \quad rv_r = -u_\varphi$$

besitzen.

b) Man zeige unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass $g(z) = z^n$ für $n \geq 1$ holomorph ist.

**Aufgabe 11:**

Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ jeweils für $0 < t < \pi$.

a) Man skizziere die Kurven $c_1$ und $c_2$ in der $z$-Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.

b) In welche Bildkurven der $w$-Ebene gehen $c_1$ und $c_2$ unter dem Hauptwert von $w = \ln z$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

**Aufgabe 12:**

a) Man skizziere die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und berechne die beiden Punkte $z_1$ und $z_2$, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von $K_1$ und $K_2$ unter $T$, wenn noch $T(0) = 1$ gilt.

**Abgabetermin:** 18.5.-20.5 (zu Beginn der Übung)