Aufgabe 1)

a) Sei i die imaginäre Einheit und R das Rechteck

$$R := \left\{ z \in \mathbb{C} \, : \, z = x + iy, \, x \in \, (0,2), \, y \in \, \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\} .$$

Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung

$$f \, : \, \mathbb{C} \to \mathbb{C} \, , \qquad f(z) := \, i \cdot e^z$$

und fertigen Sie eine Skizze des Bildes an.

b) Es seien α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ fest vorgegeben. Welche der folgenden Gebiete können mittels **einer** Möbiustransformation auf einen Sektor der Form

$$S := \left\{ w \in \mathbb{C} \, : w = \, r \, e^{i\phi}, \, r \in \mathbb{R}^+, \, -\pi \, < \varphi_1 \, < \, \phi \, < \, \varphi_2 \, < \, \pi \right\}$$

abgebildet werden? Bitte begründen Sie Ihre Antworten.

(i)
$$G_1 := \{ \, z \in \mathbb{C} \, : \, \alpha < \, |z| < \, \beta \} \, .$$

(ii)
$$G_2 := \{ \, z \in \mathbb{C} \, : \, \alpha < \, \mathrm{Re}\,(z) \, < \, \beta \} \, .$$

(iii)
$$G_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} \, : \, |z - \, \alpha| < \, \frac{3}{4} \, |\beta - \alpha| \, , \, |z - \, \beta| < \, \frac{3}{4} \, |\beta - \alpha| \right\} .$$

Hinweis : Sie brauchen keine konkrete Transformation anzugeben.

Lösung zu Aufgabe 1)

a) $\tilde{f}(z) := e^z \, = \, e^{x+iy} \, = \, e^x \cdot e^{iy} \quad \Longrightarrow$ **[1 Punkt]**
$\left| \tilde{f}(z) \right| \, = \, e^x \, \in (e^0, e^2) \, = \, (1, e^2) \, , \qquad \arg \left(\tilde{f}(z) \right) \, = \, y \, \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
$f(z) = \, i \cdot \tilde{f}(z)$: um $\pi/2$ gedreht. Also
$|\, f(z) \,| \, = \, \left| \tilde{f}(z) \right| \, \in \, (1, e^2) \, ,$ **[1 Punkt]**
$\arg \, (\, f(z) \,) \, \in \left(\frac{\pi}{2} \, , \, \pi\right)$ **[1 Punkt]**
Skizze: Viertelkreisring im zweiten Quadranten mit Innenradius 1 und Außenradius e^2. **[1 Punkt]**

b) Ein Sektor S der angegebenen Form wird begrenzt durch zwei verallgemeinerte Kreise mit den zwei Schnittpunkten Null und ∞. [**1 Punkt**]

c) Das Ringgebiet

$$G_1 := \{ z \in \mathbb{C} \, : \, \alpha < |z| < \beta \} \, .$$

wird begrenzt durch zwei schnittfreie verallgemeinerte Kreise. Die Transformation von G_1 auf S mittels einer Möbiustransformation ist nicht möglich. [**1 Punkt**]

d) Der Parallelstreifen

$$G_2 := \{ z \in \mathbb{C} \, : \, \alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta \} \, .$$

wird begrenzt durch zwei verallgemeinerte Kreise mit dem Schnittpunkt ∞. Die Transformation von G_2 auf S mittels einer Möbiustransformation ist nicht möglich. [**2 Punkte**]

e) Das Gebiet

$$G_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} \, : \, |z - \alpha| < \frac{3}{4} |\beta - \alpha| \, , \, |z - \beta| < \frac{3}{4} |\beta - \alpha| \right\} \, .$$

wird begrenzt durch zwei verallgemeinerte Kreise mit zwei Schnittpunkten z_1 und z_2. Bildet man mittels Möbiustransformation einen dieser Schnittpunkte auf Null ab, und den anderen auf ∞ so geht G_3 in einen Sektor über. [**2 Punkte**]

Skizzen:

Aufgabe 2)

a) Berechnen Sie $\int_0^\infty \dfrac{x^2\cos(\omega x)}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx\,,\quad \omega \in \mathbb{R}^+.$

b) Gegeben sei $f(z) = \dfrac{1}{z^2-4z+5}\,.$

(i) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f.

(ii) Berechnen Sie

$$\oint_C f(z)\,dz\,,\qquad C:\,[0,2\pi]\to\mathbb{C},\; C(t) = (2+2i)+2\,e^{-it}.$$

(iii) Bestimmen Sie diejenige Laurent–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2+i$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = 2$ gegen $f(2)$ konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 2)

a) **[3 Punkte]**

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2\cos(\omega x)}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\cos(\omega x)}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{z^2e^{i\omega z}}{(z^2+4)(z^2+1)}\,dz\right)\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(2\pi i\left[Res\left(\frac{z^2e^{i\omega z}}{(z^2+4)(z^2+1)}\,;i\right) + Res\left(\frac{z^2e^{i\omega z}}{(z^2+4)(z^2+1)}\,;2i\right)\right]\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\pi i\left[\frac{i^2e^{i\omega i}}{(i^2+4)(i+i)} + \frac{(2i)^2e^{i\omega 2i}}{(2i+2i)((2i)^2+1)}\right]\right)\\
&= \pi\,\mathrm{Re}\left(\frac{-e^{-\omega}}{3\cdot 2} + \frac{-4e^{-2\omega}}{4(-3)}\right) = \frac{\pi}{6}\left(2e^{-2w}-e^{-w}\right).
\end{aligned}$$

b) (i) Pole von f :

$z^2-4z+5 = (z-2)^2-4+5=0 \iff z_{1,2} = 2\pm i$ **[1 Punkt]**

Residuen von f :

$Res\,f(z_1) = \dfrac{1}{(2+i)-(2-i)} = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}\,.$ **[1 Punkt]**

$Res\,f(z_2) = \dfrac{1}{(2-i)-(2+i)} = \dfrac{1}{-2i} = \dfrac{i}{2}\,.$ **[1 Punkt]**

(ii) Mit $C:\,[0,2\pi]\to\mathbb{C},\; C(t) = (2+2i)+2\,e^{-it}$ erhält man

$\oint_C f(z)\,dz = -2\pi i\,Res\,f(2+i) = -\pi\,.$ **[1 Punkt]**

(iii) **[3 Punkte]** Diejenige Laurent–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2+i$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = 2$ gegen $f(2)$ konvergiert, erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-(2+i))(z-(2-i))} = \frac{1}{z-(2+i)} \cdot \frac{1}{z-(2-i)} \\
&= \frac{1}{z-(2+i)} \cdot \frac{1}{(z-(2+i)) + (2+i-(2-i))} = \frac{1}{z-(2+i)} \cdot \frac{1}{(z-(2+i)) + 2i} \\
&= \frac{1}{z-(2+i)} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-(2+i)}{2i})} \\
&= \frac{1}{2i(z-(2+i))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2i)^k} (z-(2+i))^k \qquad \forall\, z \,:\, |z-(2+i)| < 2 \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2i)^{k+2}} (z-(2+i))^k \qquad \forall\, z \,:\, |z-(2+i)| < 2
\end{aligned}$$