Aufgabe 1)

a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\quad T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit

$$T(i) = 0\,, \qquad T(0) = 2\,, \qquad T(2i) = \infty\,.$$

b) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T.

(i) $K :=$ imaginäre Achse,

(ii) $K_2 := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 2 \,\}$,

(iii) $\tilde{K} :=$ reelle Achse.

c) Bestimmen Sie das Bild der Viertelebene

$$S := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) > 0,\, \mathrm{Im}\,(z) > 0 \,\}\,.$$

Lösungsskizze Aufgabe 1)

a) **[1 Punkt]**

$$T(i) = 0\,, T(2i) = \infty \iff \qquad T(z) = \frac{a(z-i)}{z-2i}.$$

$$T(0) = 2\,, \qquad \iff \qquad T(z) = \frac{4(z-i)}{z-2i}.$$

b) (i) **[2 Punkte]**

Wegen der gegebenen Bilder von 0, i, $2i$ ist $T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Alternative Lösung: $\quad 2i \in i\mathbb{R} \iff T(i\mathbb{R})$ ist eine Gerade.

$T(0) = 2$, $t(\infty) = 4 \iff T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

(ii) **[2 Punkte]**

$2i \in K_2 \iff T(K_2)$ ist eine Gerade.

K_2 symmetrisch zu $i\mathbb{R} \quad \Longrightarrow T(K_2)$ symmetrisch zu $\mathbb{R}$.

$T(-2i) = \dfrac{4(-3i)}{-4i} = 3 \iff T(K_2)$ ist die Parallele zur imaginären Achse durch den Punkt 3

$$g_2 := T(K_2) = \{w \in \mathbb{C} \,:\, w = 3 + iv,\, v \in \mathbb{R}\,\}.$$

(iii) **[3 Punkte]**

$2i \notin \mathbb{R} \iff T(\mathbb{R})$ ist ein echter Kreis K_R.

$\mathbb{R}$ symmetrisch zu $i\mathbb{R}$ und $K_2 \quad \Longrightarrow T(\mathbb{R})$ ist symmetrisch zu $\mathbb{R}$ und g_2. Der Mittelpunkt des Bildkreises ist also $M = 3$.

Wegen $T(0) = 2$ ist der Radius $R = 1$.

c) **[2 Punkte]** Das Bild der Viertelebene wird berandet durch $\mathbb{R}$ und K_R.

$T(2i) = \infty \implies$ obere Halbebene $\longrightarrow$ Äußere von K_R.

$$T(2) = \frac{8-4i}{2-2i} = \frac{2(2-i)(1+i)}{1-i^2} = 2+2i-i+1 = 3+i\,.$$

Die rechte Halbebene wird also auf die obere Halbebene abgebildet.

$$T(S) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) > 0,\ |w-3| > 1\}.$$

Aufgabe 2)

a) Gegeben sei

$$f(z) \;=\; \frac{z^2+2z}{(z^2-4)(z-1)^2}\,.$$

(i) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

(ii) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_C f(z)\,dz\,, \qquad C:\;[0,4\pi]\to\mathbb{C},\; C(t)=\frac{3}{2}\,e^{it}.$$

b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$$

Lösungsskizze Aufgabe 2)

a) $$f(z) \;=\; \frac{z(z+2)}{(z+2)(z-2)(z-1)^2}\,.$$

(i) **[2 Punkte]**

$z_0 \;=\; -2$: hebbar.

$z_1 \;=\; 1$: Pol der Ordnung 2.

$z_2 \;=\; 2$: Pol der Ordnung 1.

(ii) **[3 Punkte]**

$$I_1 := \oint_C f(z)\,dz \;=\; 4\pi i\, Resf(1)\,.$$

$$Resf(1) \;=\; \lim_{z\to 1}\,\left[(z-1)^2 f(z)\right]' \;=\; \left[\frac{-2}{(z-2)^2}\right]_{z=1} \;=\; -2\,.$$

$$\Longrightarrow \qquad I_1 \;=\; -8\pi i\,.$$

b) Wir betrachten $\quad g(z) := \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+2z+2)}\quad$ mit den Nennernullstellen

$z_{1,2} \;=\; \pm i\,, \qquad z_{3,4} \;=\; -1\pm i\,.$ **[2 Punkte]**

Mit $g(z) := \dfrac{1}{(z+i)(z-i)(z+1+i)(z+1-i)}$ gilt

$$I_2 := \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} \;=\; 2\pi i\,[\,Resg(i) \;+\; Resg(-1+i)\,]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{(2i)(1+2i)} \;+\; \frac{1}{(-1)(-1+2i)(2i)}\right] \;=\; \pi\left[\frac{1-2i+1+2i}{(1+2i)(1-2i)}\right] \;=\; \frac{2\pi}{5}\,.$$