Department Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2009**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 3

Aufgabe 1: Transformieren Sie $G := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}\,,\ -\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8}\,, 0 < r < 2\}$

bijektiv und konform auf das Innere des Einheitskreises.

Warum tut es $z \mapsto \left(\frac{z}{2}\right)^8$ nicht?

Aufgabe 2:

Gegeben seien die Kreisscheiben K_1 und K_2 mit Radius 1 um die Mittelpunkte i bzw. $-i$. Die Kreisscheibe K_1 möge ein elektrostatisches Potential von 0 und die Kreisscheibe K_2 ein elektrostatisches Potential von 1 haben. Im Punkt 0 seien die Kreisscheiben gegeneinander isoliert.

Zur Bestimmung des induzierten elektrostatischen Potentials und der Feldstärke soll das Gebiet außerhalb der Kreisscheiben bijektiv und konform auf einen Ring (Gebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen) oder einen Streifen (Gebiet zwischen zwei parallelen Geraden) abgebildet werden.

Welche der beiden Tansformationen (Ring bzw. Streifen) ist möglich?

Geben Sie eine Transformation an, die das gewünschte leistet.

Bemerkung: Das Potentialproblem werden wir gegen Ende des Semesters lösen können (vgl. Zeitplan, Vorlesung 12).

Aufgabe 3: Bitte bewerten Sie folgende Aussagen.

a) Sei f eine auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion mit $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2$. Dann ist

☐ $f(z) = z^2 + i\,c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$.

☐ $f(z) = z^2 + i\,c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

☐ f eindeutig gegeben durch $f(z) = z^2$.

b) Die Funktion
$$f(z) = (\operatorname{Re}(z) + 2)^2 - (\operatorname{Im}(z) + 2)^2 + i\big[\operatorname{Im}(z)(\operatorname{Re}(z) + 4) + \operatorname{Re}(z)(\operatorname{Im}(z) + 4)\big]\,.$$

☐ ist nur für $z = 0$ komplex differenzierbar.

☐ ist überall in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

c) Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen lauten in Polarkordinaten

$$ru_r = v_\phi\,, \qquad rv_r = -u_\phi.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben. Dann sind die Funktionen $f_k : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$,

$$f_k(z) := f_k(re^{i\phi}) := \frac{1}{k}\ln(r^n) + i\phi \qquad \phi \in (-\pi, \pi)$$

☐ für beliebige $k \in \mathbb{N}$ analytisch.

☐ für genau ein $k \in \mathbb{N}$ analytisch.

d) Es sei $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = 3x^2 - y^2$ und $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$.

☐ Es gibt keine auf $\mathbb{C}$ analytische Funktion f mit dem angegebenen Realteil u .

☐ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten v so zu wählen, dass f für alle $z = x + iy$ mit $x = 0$ komplex differenzierbar wird.

e) Es sei f eine auf ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion.

☐ Dann folgt aus $|f(z)|$ konstant, dass $f(z)$ konstant ist.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale und skizzieren Sie die zugehörigen Kurven.

a) $\displaystyle\int_C (\overline{z})^2\, dz,$ $\qquad C$: geradliniger Weg von $1 + i$ nach $-1 - i$,

b) $\displaystyle\int_C z \sin z\, dz,$ $\qquad C(\varphi) = 2e^{i\pi\varphi},\ \varphi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

c) $\displaystyle\int_C e^{3z}\, dz,$ $\qquad C$: Das Stück der Parabel $\operatorname{Im}(z) = \pi\,(\operatorname{Re}(z))^2$ welches die Punkte Null und $1 + i\pi$ verbindet.

d) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z}\, dz,$ $\qquad C_1(t) = e^{(1+i)t}, \quad t \in [0, 2\pi]\,,$

e) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \frac{1}{z}\, dz,$ $\qquad C_1$ wie oben, C_2 die geradlinige Verbindung zwischen $e^{2\pi}$ und 1

$C_1 + C_2$: erst C_1 durchlaufen, anschliessend C_2.

Abgabetermine: 3. bzw. 4.6.09