Department Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2009**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1: Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen

a) i) $e^z = 4$ ii) $e^z = 2 + 2i$
iii) $z^4 = 16$ iv) $z^4 = 8\sqrt{2}(1+i)$.

b) Bitte bewerten Sie folgende Aussagen. Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben ,,w" (für wahr) oder ,,f" für falsch ein. Für jede richtig bewertete Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch bewertete Aussage wird Ihnen ein halber Punkt abgezogen. Nicht bewertete Aussagen gehen nicht in die Wertung ein.

(i) Die Lösungsmenge der Gleichung $(1-i)\cdot\bar{z} = (1+i)\cdot z$ in $\mathbb{C}$

☐ ist leer.

☐ ist mit einer geeigneten Konstanten a die Gerade $\mathrm{Im}\,(z) = a \cdot \mathrm{Re}\,(z)$ durch Null.

☐ Ist mit einem geeigneten Winkel der Strahl $z = re^{i\alpha}$.

☐ Ist der Kreis $z = \sqrt{2}\,e^{i\phi}$.

(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

☐ $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

☐ $\sin(\bar{z}) = -\overline{\sin(z)}$.

☐ $\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Abbildung $w = f(z) := \dfrac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{C},\, z \neq 0$.

a) Bestimmen Sie die Bilder

(i) der Strahlen $\arg(z) = \varphi_0$,

(ii) der Geraden $\mathrm{Re}\,(z) = x_0$,

(iii) der Geraden $\mathrm{Im}\,(z) = y_0$.

b) Zeigen Sie, dass das Bild eines Kreises, der nicht durch Null geht, ein Kreis ist. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Bildkreises.
Was ist das Bild von $|z-2|=1$?

c) Was ist das Bild des Kreises $|z-\frac{i}{2}|=\frac{1}{2}$?

Hinweis: Sei $c \in \mathbb{C}$ und $R \in \mathbb{R};\ R \geq 0$. Dann gilt die Äquivalenz

$$|z-c| = R \iff z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + c\bar{c} = R^2\,.$$

Aufgabe 3:

Durch $L := \{\, z \in \mathbb{C} : |z-i| \cdot |z+i| = 1 \,\}$ sind diejenigen Punkte der komplexen Zahlenebene gegeben, deren Abstände von den Punkten $+i$ und $-i$ das Produkt 1 haben. Es handelt sich um eine sogenannte Lemniskate. Zeigen Sie, dass das Bild der Lemniskate L unter der Abbildung $(x+iy) = z \to z^2 =: w =: u+iv$ ein mehrfach durchlaufener Kreis ist.

Aufgabe 4 :

a) Für welche komplexen Zahlen z konvergieren die folgenden Reihen?

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (2-\frac{z}{2})^k$, ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-2i}{z-2}\right)^k$,

b) Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{4k^2+1}\right)(z-i)^k$, ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}\,(z-\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,)^{2k}$.

Abgabetermine: 27-29.4.09