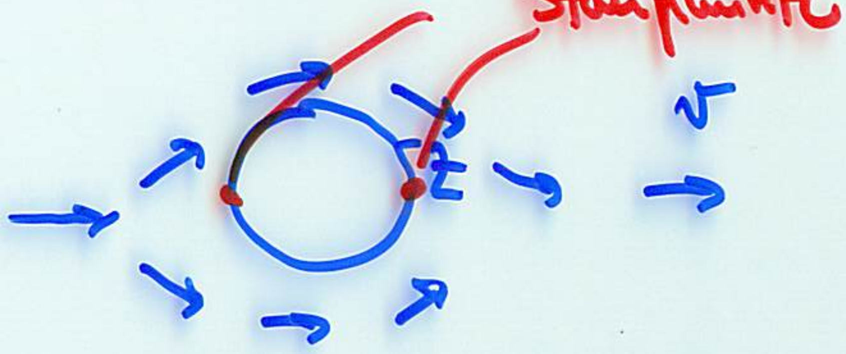
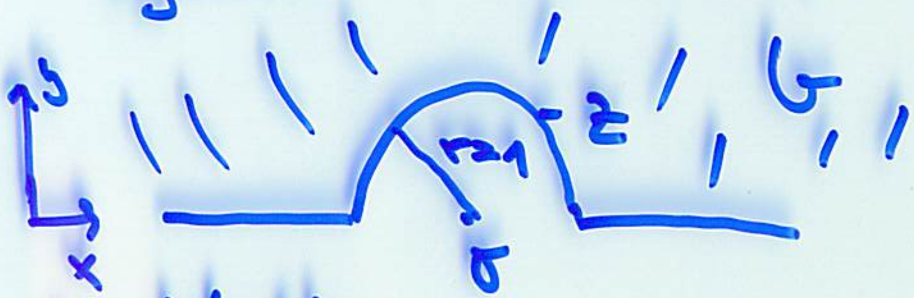
100709

Aufgabe: Finde ebene, symmetrische Strömung um Kreiszylinder



Strömung erfülle auf Z Haftbedingungen, $v|_Z = 0$

Symmetrie: Es reicht,



zu betrachten.

$G = \{ z = x+iy \,;\, y \geq 0, |z| \geq 1 \}$

$= \{ r e^{i\varphi} \,;\, r \geq 1, \varphi \in [0,\pi] \}$.

Ziel: Abbildung von G auf $H := \{ z \,;\, y \geq 0 \}$ mit analytischer Funktion.

Betrachte $f(z) := z + \frac{1}{z}$.

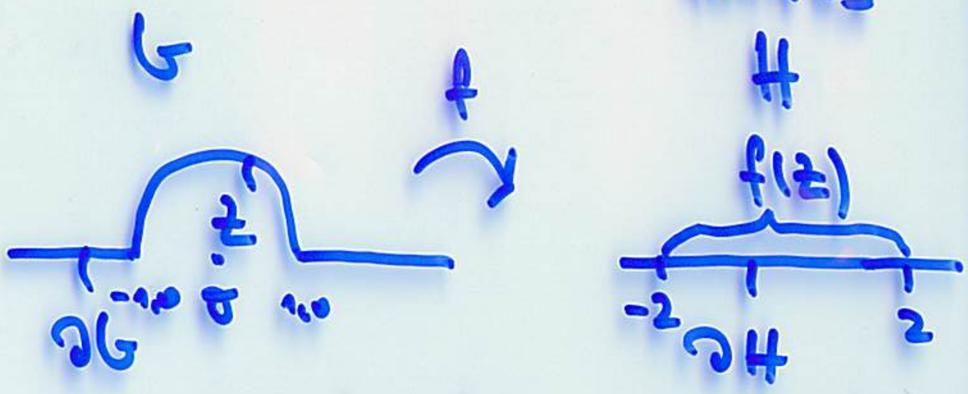
Dann gilt

$$f(G) = H$$

und

$$f(\partial G) = \partial H$$

1007 09



komplexe Geometrie — einfache Geometrie

$$f(z) = \{ z = x+iy \; ; \; y=0 \text{ und } -2 \le x \le 2 \} =: \Gamma_z$$

Wähle $U(x,y) := y$

$\rightarrow \quad U|_{\Gamma_z} = 0$ und $\Delta U = 0$

Definiere

$$\chi(x,y) := U(f(x+iy))$$

② Damit $\chi|_{\Gamma_z} = 0$ und, da U harmonisch und f analytisch, auch

$\Delta \chi = 0$ in G

Es gilt wegen $f(z) = r e^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$

$$\chi(x,y) = \left(r - \frac{1}{r}\right) \underbrace{\sin\varphi}_{\frac{y}{r}}$$

$$= y - \frac{y}{x^2+y^2}$$

Setze $v := \begin{bmatrix} \chi_y \\ -\chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix}$

und finde κ mit $\nabla \kappa = v$

$\Rightarrow \Delta \kappa = 0$. Dann mit $g(z) = \kappa + i\chi$ gilt $v = \overline{g'(z)}$

100703

dann

$$g'(z) = \underbrace{\kappa_x}_{\chi_y} + i\chi_x$$

$$\Rightarrow \overline{g'(z)} = \chi_y - i\chi_x = v_1 + i v_2$$

Umströmende Strömung

Für $|z| \to \infty$: $v \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Staupunkte des Zylinders: $(-1,0)$ und $(1,0)$: $v = 0$

χ heißt Stromfunktion, weil Niveaulinien den Strömungslinien entsprechen, denn

③ $v = \nabla\kappa = \begin{bmatrix} \chi_y \\ -\chi_x \end{bmatrix} \perp \nabla\chi$ und

$\nabla\chi \perp$ Niveau von χ.