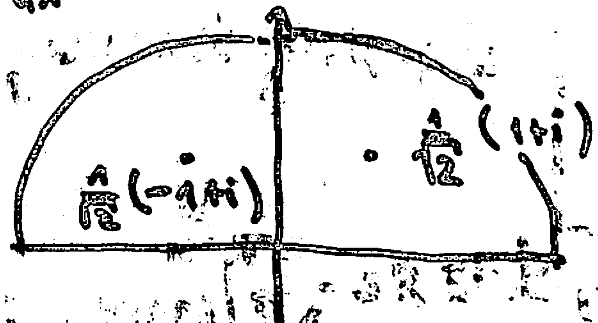
Nobody!

Formel 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_i\right)$$

Bsp: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$



$$= 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right) \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i) + \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) \right\} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(A) Formel 2: Betrachte $\omega > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx, \quad \deg q \geq \deg p + 1$$

und $z_1, \dots, z_m$ Singularitäten von $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit $\operatorname{Im} z_i > 0$. dh.

Wie bei Herleitung von Formel 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{i\omega x} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma - K_R} e^{i\omega z} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz \to 0$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} e^{i\omega z} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}\left(e^{i\omega z} \frac{p(z)}{q(z)}, z_i\right)$$

Abobos

falls $\int_{C_R} e^{i\omega z}\frac{f(z)}{g(z)}\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$

$$= \int_0^{\pi} e^{i\omega Re^{it}} \frac{f(Re^{it})}{g(Re^{it})}\, iRe^{it}\,dt$$

NR: $e^{i\omega Re^{it}} = e^{-\omega R\sin t}\, e^{i\omega R\cos t}$

Damit

$$\left|\int_{C_R} e^{i\omega z}\frac{f(z)}{g(z)}\,dz\right| \le M(R)\int_0^{\pi} R\, e^{-\omega R\sin t}\,dt$$

mit $M(R) = \max_{|z|=R}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \le \frac{C}{R}$

Es gilt

$$\int_0^{\pi} e^{-\omega R\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-\omega R\sin t}\,dt$$

(2) Auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ gilt

$$\frac{2}{\pi} \le \frac{\sin t}{t} \le 1$$

$\Rightarrow -\sin t \le -\frac{2}{\pi}t$

Damit

$$\int_0^{\pi/2} R\, e^{-\omega R\sin t}\,dt \le \int_0^{\pi/2} R\, e^{-\frac{2}{\pi}\omega R t}\,dt \le \frac{\pi}{2\omega}$$

Insgesamt

$$\left|\int_{C_R} e^{i\omega z}\frac{f(z)}{g(z)}\,dz\right| \le M(R)\frac{\pi}{\omega} \le \frac{C}{R}\frac{\pi}{\omega} \to 0 \quad (R\to\infty)$$

Bsp: $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\frac{1}{x^2+1}\,dx\right)$

$$= \mathrm{Re}\left[\pi i \, \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i\right)\right] = \mathrm{Re}\left[\pi i \, \frac{e^{-1}}{2i}\right] = \frac{\pi}{2e}$$

Bsp: $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, \frac{x}{x^4+1} \, dx$

$$= \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{x}{x^4+1} \, dx\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(2\pi i \left[\mathrm{Res}\left(e^{iz} \frac{z}{z^4+1}, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) + \mathrm{Res}\left(e^{iz} \frac{z}{z^4+1}, \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right)\right]\right)$$

$$= \pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Formel 3: R gebrochen rational, $R = R(a,b)$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right), z_k\right)$$

③ Herleitung (Formel 3)

$$\int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} \, dz \qquad z = e^{it}$$

$$= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{2it}+1}{2e^{it}}, \frac{e^{2it}-1}{2i e^{it}}\right) \frac{i e^{it}}{i e^{it}} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) \, dt$$

Bsp: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\sin t} \, dt$

$$= 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{iz} \, \frac{1}{3 + \frac{z^2-1}{2iz}}, z_k\right)$$

mit $z_k = i(-3+\sqrt{8})$, $|z_k| < 1$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Zshg zwischen analytischen und harmonischen Funktionen →

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, falls $\Delta \phi = 0$ gilt.

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \operatorname{div} \nabla$$

Aus A III: $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ quellenfreies VF, d.h. $\operatorname{div} w = 0$

und ist χ Potential von w, d.h. $w = \nabla \chi$, folgt

$0 = \operatorname{div} \nabla \chi = \Delta \chi$,

④ d.h. das Potential χ ist harmonisch.

Sei jetzt f auf $D \subseteq \mathbb{C}$ analytisch, $f(z) = \phi(z) + i\chi(z)$, $z = x+iy$, so dass auch ϕ und χ 2-mal stetig differenzierbar als Funktionen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Form CR-DGLen (siehe Kap. ?):

$\phi_x = \chi_y$ und $\phi_y = -\chi_x$

Damit folgt:

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \chi_y - \frac{\partial}{\partial y} \chi_x \overset{\text{Satz v. Schwarz}}{=} \chi_{yx} - \chi_{xy}$$

$= 0$, d.h. Re f harmonisch

260603

Analog: $\Delta \chi = 0$, also

Satz 10.14: f analytisch $\Rightarrow$ $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ harmonisch.

Sei jetzt $\varphi : D \to \mathbb{R}$ harmonisch auf dem einfach zshgden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$, d.h. $\Delta \varphi = 0$. Setze

$$\omega = \begin{bmatrix} -\varphi_y \\ \varphi_x \end{bmatrix} \Rightarrow d\omega = \begin{bmatrix} -\varphi_{yx} & -\varphi_{yy} \\ \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \end{bmatrix}$$

Symmetrisch weil $\varphi_{xx} = -\varphi_{yy}$ aus $\Delta \varphi = 0$ folgt. Also erfüllt ω die Integrabilitätsbedingungen.

(5) Es ex. also Potential $\chi : D \to \mathbb{R}$ mit $\omega = \nabla \chi$,

d.h. $\omega_1 = \chi_x = -\varphi_y$

$\omega_2 = \chi_y = \varphi_x$.

Das Paar (φ, χ) erfüllt also die CR DGLen! Damit ist

$$f(z) := \varphi(z) + i\,\chi(z)$$

analytischen Funktion

Satz 10.15: φ harmonisch auf $D \subset \mathbb{R}^2$ einf. zshgd und χ mit $\nabla \chi = \begin{bmatrix} -\varphi_y \\ \varphi_x \end{bmatrix} \Rightarrow f = \varphi + i\chi$ analytisch.