19.06.09

Anwendungen des und Folgerungen aus dem Residuensatz

f habe isolierte Singularitäten $z_1, \dots, z_n$. Dann, falls $\mathcal{C}$ alle z_i umschließt,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_i).$$

Bsp für Singularitäten

i.) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$

$$\overset{\text{Laurent}}{\underset{\text{Reihe}}{=}} \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}}_{\text{analytisch}} \Rightarrow a_k = 0 \ \forall k < 0$$

$z_0 = 0$ ist hebbar, $f(z_0) := 1$

ii) $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$

$$\vdots$$

$$= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{2i} \left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} (z-i)^k$$

für $|z-i| < 2$ $\Rightarrow$ $a_{-1} = \frac{1}{2i}$

$z_1 = i$, $z_2 = -i$ Polstellen

iii) $e^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{(-k)!} (-1)^{-k} (z-1)^k$

$a_k \neq 0 \ \forall k < 0$ $\quad$ $z = 1$ ist wesentliche Sing.

15.06.09

Eine Singularität z_0 heißt

i.) hebbar, falls $a_k = 0 \ \forall_{k<0}$

ii) Polstelle, falls $a_k = 0 \ \forall_{k<-m}$
und $a_{-m} \neq 0$

iii) wesentlich, falls $a_k \neq 0 \ \forall_{k<0}$,

wobei a_k Koeffizienten der Laurent Entwicklung bezeichnen.

<u>Satz von Riemann</u>: z_0 isolierte Singularität von f und f in $K_r(z_0)\setminus\{z_0\}$ beschränkt.
Dann ist z_0 hebbar.

(2) Nachweis: $f(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k (z-z_0)^k$

mit $a_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\, d\zeta$

Es gilt $|a_k| \le \frac{1}{2\pi} \underbrace{\max_{\zeta\in\partial K_r(z_0)} |f(\zeta)|}_{\le M} \frac{1}{r^{k+1}}\, 2\pi r$

$\le M r^{-k} \ (\to 0) \ r \to 0$

falls $k\in\mathbb{Z}$, $k<0$. $\Rightarrow a_k = 0 \ \forall_{k<0}$

$\Rightarrow z_0$ hebbar.

<u>Satz von Casorati-Weierstrass</u>

z_0 wesentliche Singularität von f.
Dann kommen die Werte von f in jeder Umgebung von z_0 jeder komplexen Zahl beliebig nah.

190609

<u>Nachweis</u>: Ann.: $w \in \mathbb{C}$ mit

$|f(z) - w| \geq \varepsilon \quad \forall_{z \in K_r(z_0) \setminus \{z_0\}}$

$\Rightarrow \quad g(z) := \frac{1}{f(z) - w}$ in $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$

analytisch und $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$

$\forall_{z \in K_r(z_0) \setminus \{z_0\}} \xrightarrow[\text{Riemann}]{\text{Satz v.}} z_0$ für

g hebbar und g analytisch in

$K_r(z_0)$. Also besitzt g höchstens

isolierte Nullstellen in $K_r(z_0)$

mit endlicher Ordnung

i.) $g(z_0) \neq 0$, $\nrightarrow$ klein genug

$\Rightarrow f(z) - w = \frac{1}{g(z)}$ analytisch in $K_r(z_0)$

(2)

$\Rightarrow$ f in $K_r(z_0)$ analytisch $\lightning$

ii.) $g(z_0) = 0$, $g(z) = (z - z_0)^m g_1(z)$ mit

g_1 analytisch in $K_r(z_0)$. Damit

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} = w + \sum_{n=-m}^{\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n,$$

wobei $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

d.h. Laurent Reihe von f besitzt nur

endlich viele Koeffizienten mit neg. Index.

Also z_0 nicht wesentliche Sing. für f.

$\lightning$

Integralberechnung mit Hilfe des

Residuensatzes

i.) $$\int_{K_r(0)} \frac{\cos z}{\sin z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{\sin z}, 0\right) = 2\pi i \frac{\cos(0)}{\sin'(0)}$$

$$= 2\pi i.$$

150609

ii) $$\int_{K_r(0)} \frac{1}{(1+z^2)^2}\,dz = \int_{K_r(0)} \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}\,dz$$

$$\underset{\underbrace{}_{2\pi i}}{\overset{r>1}{=}} \left(\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, -i\right)\right) = ⊛$$

Hier $q(z) = (1+z^2)^2$, $q(i)=0$ und $q'(i)=0$. Wie Residuen berechnen $\rightsquigarrow$

<u>Hilf</u><u>satz</u>: $f(z) = \frac{p(z)}{(z-z_0)^m}$

$$\to \mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\, p^{(m-1)}(z_0)$$

<u>Nachweis</u>: Cauchy Formel liefert

$$p^{(m-1)}(z_0) = \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{p(\xi)}{(\xi-z_0)^m}\,d\xi$$

(4) Ferner

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r(z_0)} f(\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r(z_0)} \frac{p(\xi)}{(\xi-z_0)^m}\,d\xi$$

$$\to \mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\, p^{(m-1)}(z_0)$$

$$⊛ = \left\{ \left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=i} + \left(\frac{1}{(z-i)^2}\right)'\Bigg|_{z=-i} \right\} 2\pi i$$

$\vdots$

$$= \frac{i}{2}\, 2\pi i = -\pi$$ Bitte nachrechnen

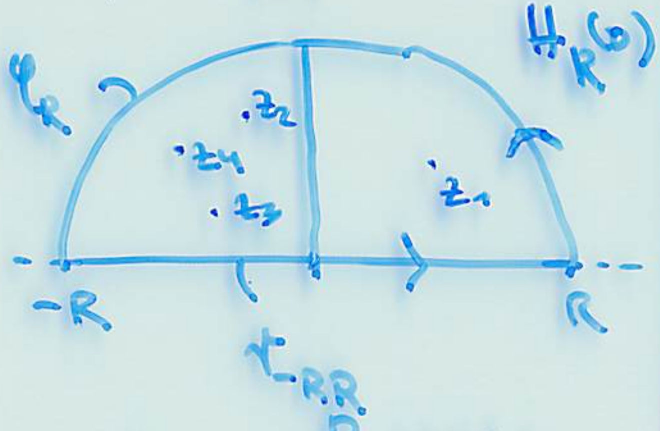
iii) $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $q(z_i) = 0$ $i = 1, \dots, m$

mit $\mathrm{Im}\, z_i > 0$, p, q Polynome mit reellen Koeffizienten und $\deg q \geq \deg p + 2$

13.06.09

Beh.: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_i\right)$$

Nachweis



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{-R,R}} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz$$

$$= \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_{H_R(0)} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz}_{= 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_i\right)}, \quad \text{falls}$$

R groß genug

⑤ $$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = 0 \quad :$$

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{p(Re^{it})}{q(Re^{it})}\, iRe^{it}\,dt \right|$$

$$\le \pi R \max_{x\in \mathcal{C}_R} \frac{|p(x)|}{|q(x)|} \le C\,R\,\frac{R^s}{R^{s+2}}$$

$$= C\,\frac{1}{R} \longrightarrow 0 \quad (R\to\infty).$$