

20609

Verhalten komplexer Funktionen bei Singularitäten, Laurent-Entwicklung

Sei f in $G \setminus \{z_0\}$ analytisch,

z_0 Singularität von f , d.h. Stelle, an der f nicht erklärt ist ~~hebbar~~

z.B. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$,

$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $q(z_0) = 0$

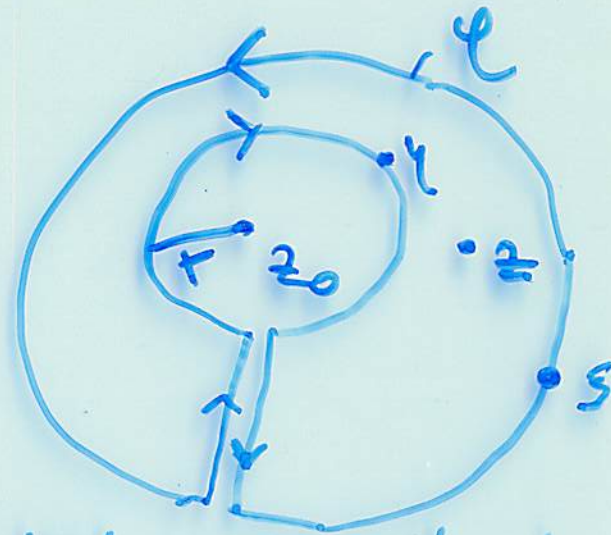
p, q Polynome, $q(z_0) \neq 0$ (Polstellen),

oder $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$, $z_0 = 1$

wesentliche Singularität

(1)

f analytisch
in $G \setminus \{K_r(z_0)\}$,
wobei Rand
von G hier



durch C dargestellt (z.B. Kontur eines
hebbar Kristallgitters). Dann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C \cup \partial K_r(z_0)^+} \frac{f(s)}{s-z} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(y)}{y-z} dy$$

Es gilt $\frac{|z-z_0|}{|s-z_0|} < 1$. Daher

120609

$$\text{mit } \frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}}$$

$$= \frac{1}{s-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{s-z_0} \right)^n \quad \textcircled{1}$$

Analog für $y \in \mathcal{D}K_r(z_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y-z} &= - \frac{1}{z-z_0 - (y-z_0)} \\ &= - \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{y-z_0}{z-z_0}} \end{aligned}$$

Hier $\left| \frac{y-z_0}{z-z_0} \right| < 1$, also

$$\frac{1}{y-z} = - \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y-z_0}{z-z_0} \right)^n \quad \textcircled{2}$$

(2) Mit $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ in Darstellung für f :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}} ds \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{D}K_r(z_0)} \frac{f(y)(y-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} dy \end{aligned}$$

Satz

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$a_{-n} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{D}K_r(z_0)} \frac{f(y)}{(y-z_0)^{-n+1}} dy \quad n=1, 2, \dots$$

12.06.09

Damit

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n
 \end{aligned}$$

Laurent Reihe von f bei z_0 .i.) Darstellung eindeutig $\hookrightarrow$ warum?ii.) f analytisch in $K_r(z_0)$, so ist

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}, k < 0$$

analytisch, also nach Cauchy Integralsatz
 $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}, n < 0.$

(3) Dann ergibt sich die Taylorreihe von f .

$$\text{iii)} \quad a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} f(z) dz$$

hängt im Integranden nicht explizit von z_0 ab.

$$\text{Res}(f(z), z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} f(z) dz$$

heißt Residuum von f bei z_0 .

Das führt auf den

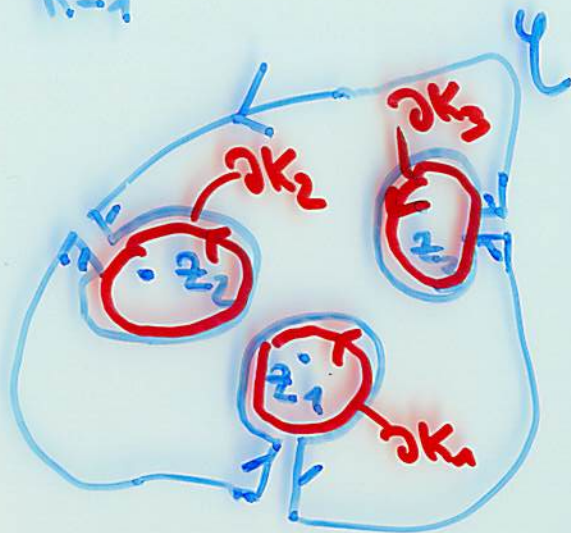
Nachg

Residuensatz: Sei f analytisch
in $G \setminus \{z_0, \dots, z_n\}$. γ umschlieÙe
alle z_i ($i=0, \dots, n$) und verlaufe in
 G . Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k)$$

Nachweis:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} f(z) dz \\ &+ \int_{\partial K_1^*} f(z) dz + \dots + \int_{\partial K_n^*} f(z) dz \end{aligned}$$



(4) Damit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_k} f(z) dz$$

$$= \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k).$$

Folgerungen aus dem Residuensatz,
Vorlesung.

i.) Sei z_0 Pol erster Ordnung, d.h.

$$f(z) = a_{-1} (z-z_0)^{-1} + a_0 + \dots$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Res}(f(z), z_0) &= a_{-1} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) \end{aligned}$$

ii) $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $q(z_0) = 0$, $q'(z_0) \neq 0$ 12.06.09
 d.h. z_0 einfache Nullstelle von q

Dann mit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{p(z)}{q(z) - q(z_0)}}{\frac{z - z_0}{z - z_0}} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

$$= \text{Res}(f(z), z_0)$$

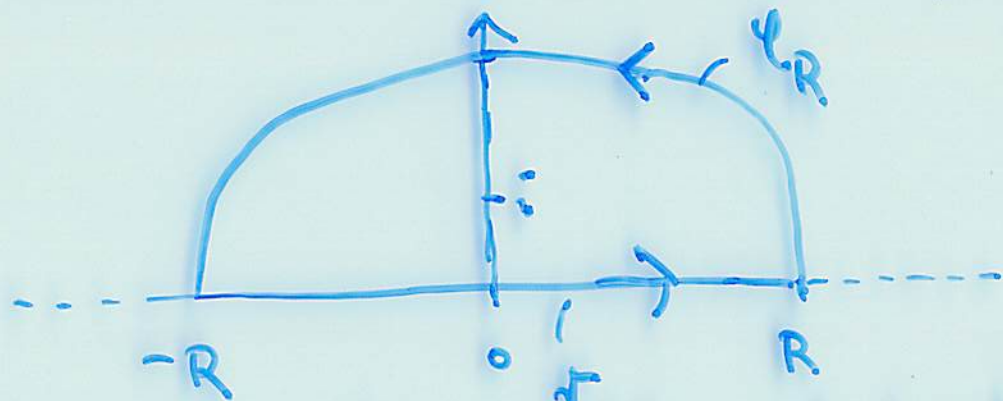
Bsp: $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ $z_0 = i$

$$p(z) = 1, \quad q(z) = 1+z^2, \quad q'(z) = 2z$$

$$\rightarrow \text{Res}(f(z), i) = \frac{1}{2i}$$

⑤ Anwendung: Berechnung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$



$$\begin{aligned} \star &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_{-RR}} \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz \right) \\ &= \int_{\gamma_{-RR} \cup \gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) \\ &= \pi \cdot 2i \cdot \frac{1}{2i} \\ &= \pi \end{aligned}$$

11.06.09

①

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+z^2} dz \quad \vee, \text{ und}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 0, \text{ denn}$$

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi \quad \vee$$