Komplexe Funktionen

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

29. Mai 2009

Reihenentwicklung komplexer Funktionen

Sei f in G analytisch, $K_r = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subseteq G$ und $z_1 \in K_r$. Sei $S_r = \partial K_r$. Unter Verwendung der Cauchy Integralformel erhalten wir wegen $|\frac{z_1 - z_0}{z - z_0}| < 1$

$$
\begin{aligned}
f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0) - (z_1 - z_0)}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{1}{1 - (z_1 - z_0)/(z - z_0)}\, dz\,, \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 - z_0)^k}{(z - z_0)^k}\, dz \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} (z_1 - z_0)^k\, dz \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz)(z_1 - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z_1 - z_0)
\end{aligned}
$$

Satz 10.8: Taylorreihe

Ist $f(z)$ im Gebiet G analytisch und ist $z_0 \in G$, dann gilt für alle $z \in K_{z_0,r} = \{z \mid |z - z_0| < r\}$, $K_{z_0,r} \subset G$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ , \ \text{wobei } a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz$$

mit S_r als Randkurve von $K_{z_0,r}$. z_0 heißt Entwicklungspunkt der Taylor-Reihe.

Konsequenz: Jede in einem Punkt z_0 differenzierbare komplexe Funktion lässt sich in eine **konvergente** Taylor-Reihe entwickeln.

Konvergenzradius: r so weit vergrößerbar, bis man mit der Kreislinie an einen singulären Punkt von $f(z)$ stößt.

Differenzierbare Funktionen sind, zufolge ihrer Entwickelbarkeit in Potenzreihen, im Konvergenzkreis beliebig oft differenzierbar. Diese Eigenschaft einer differenzierbaren Funktion rechtfertigt erst die Bezeichnung **analytisch**.

Behandlung von Singularitäten und der Residuensatz

Stellen, an denen komplexe Funktionen nicht definiert sind, heißen **Singularitäten**.

Das Verhalten in der Nähe Singulariäten beschreibt

Satz 10.9 (Laurent-Reihenentwicklung): Sei f auf der offenen Menge G bis auf isolierte Singularitäten analytisch und sei $z_0 \in G$ eine solche, in $K_{z_0,r} = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subset G$ unique Singularität. Dann gilt für alle $z \neq z_0$ aus $K_{z_0,r}$ die Laurent-Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

mit Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz.$$

Dabei ist S_r Randkurve von $K_{z_0,r}$.