Komplexe Funktionen

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

20. Mai 2009

Integration komplexer Funktionen

Sei $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ eine auf $D \subset \mathbb{C}$ definierte, stetige komplexe Funktion. Wir wollen f integrieren. Das geht auf vielen 'Wegen'.

Unter einer **Kurve** in der Gaußschen Zahlenebene versteht man eine Punktmenge γ, die sich in der Form $z(t) = x(t) + iy(t)$ mit stetigen reellwertigen Funktionen $x(t),\ y(t)$ darstellen lässt (Parameterdarstellung). z bildet ein Intervall $[a, b]$ in $\mathbb{C}$ ab. Die Kurve heißt stetig differenzierbar, wenn $x(t),\ y(t)$ stetige Ableitungen haben.

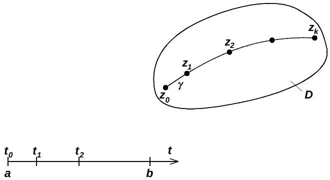


Abb. 10.9: Zur Definition des komplexen Kurvenintegrals $\int_\gamma f(z)\, dz$

Komplexe Kurvenintegrale und Arbeitsintegrale

Es sei $\gamma \subset D$. Unterteile $[a, b]$ in k Teilintervalle $[a, t_1], [t_1, t_2], \ldots,$ $[t_{k-1}, b]$. Den Punkten t_j ($0 \leq j \leq k$) entsprechen dann die Kurvenpunkte $z_j = z(t_j) = x(t_j) + iy(t_j)$. Bei in D stetigem f gilt

$$\sum_{j=1}^{k} f(z_j)(z_j - z_{j-1}) \to c =: \int_\gamma f(z)dz \text{ (komplexes Kurvenintegral längs } \gamma\text{)},$$

für Feinheit der Zerlegung gegen Null. Mit $f = u + iv$ finden wir

$$\begin{aligned} f(z_j)(z_j - z_{j-1}) = u(x_j, y_j)(x_j - x_{j-1}) - v(x_j, y_j)(y_j - y_{j-1}) \\ + i[u(x_j, y_j)(y_j - y_{j-1}) + v(x_j, y_j)(x_j - x_{j-1})]. \end{aligned}$$

Damit (siehe Arbeitsintegral, Kap. 8)

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u, -v)^t \cdot (dx, dy)^t + i \int_\gamma (v, u)^t \cdot (dx, dy)^t = \\ = \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y})\, dt + i \int_a^b (v\dot{x} + u\dot{y})\, dt. \end{aligned}$$

Rechenregeln komplexes Kurvenintegral

Wegen $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ erhalten wir

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt.$$

Rechenregeln:

- $\int_\gamma [c_1 f(z) + c_2 g(z)]\,dz = c_1 \int_\gamma f(z)\,dz + c_2 \int_\gamma g(z)\,dz$,
- $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$,
- $\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{\gamma^*} f(z)\,dz$,
- $|\int_\gamma f(z)dz| \leq \text{Länge}(\gamma) \max_{z\in\gamma} |f(z)|$,

für stetige Funktionen f, g und c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ sowie $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ und $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ oder Endpunkt von γ_1 ist gleich Anfangspunkt von γ_2. Dabei ist γ^* der gegenläufig zu γ durchlaufene Kurve (Weg).

Komplexe Kurvenintegrale und der Satz von Green

Die Identität

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u,-v)^t \cdot (dx,dy)^t + i\int_\gamma (v,u)^t \cdot (dx,dy)^t$$

liefert mit dem Satz 8.7 von Green (für $w = (a,b)^t$, γ Rand von G)

$$\int_\gamma w \cdot (dx,dy)^t = \int_\gamma adx + bdy = \int_G b_x - a_y dxdy$$

direkt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_G (v_x + u_y)\,dxdy + i\int_G (u_x - v_y)\,dxdy.$$

Cauchy Integralsatz 10.3

Ist γ eine geschlossene Kurve in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D und ist f in D analytisch, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

Bew.: $f = u + iv$ analytisch, also gelten die CRDGLen

$$u_x = v_y \text{ und } v_x = -u_y.$$

Damit ergibt sich mit dem Satz von Green (γ Rand G)

$$\int_\gamma f(z)\, dz = -\int_G (v_x + u_y)\, dxdy + i \int_G (u_x - v_y)\, dxdy = 0.$$

Einfach zusammenhängend: γ ist Rand G, die Menge G kann somit keine Löcher enthalten.

Stammfunktionen

$F(z)$ heißt Stammfunktion der analytischen Funktion $f(z)$, falls

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz} = F'(z)$$

gilt. Hat man eine Stammfunktion gegeben, ergibt sich für $\gamma = \{z(t) \mid t \in [a, b]\}$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma \frac{dF(z)}{dz}\, dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

denn

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dt =$$
$$= \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))dt = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Vergleiche auch Stammfunktionen von Gradienten (Potential-) Feldern.

Eigenschaften komplexer Integrale, Satz 10.4

Ist F Stammfunktion der analytischen Funktion f, dann gilt:

i) Für eine Kurve $\gamma = \{z(t) \mid a \le t \le b\}$ ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a))\ .$$

ii) Das Integral über $f(z)$ ist wegunabhängig, d.h. für $\gamma_1 = \{z_1(t) \mid a \le t \le b\}$ und $\gamma_2 = \{z_2(t) \mid a \le t \le b\}$ mit $z_1(a) = z_2(a)$ und $z_1(b) = z_2(b)$ gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\ .$$

Ist das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ wegunabhängig, dann gibt es immer eine Stammfunktion von f, und zwar

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta\ .$$

Folgerungen aus dem Cauchy Integralsatz

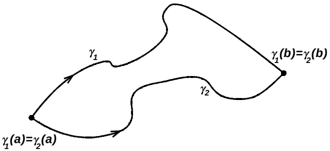
Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D. Dann ist das komplexe Kurvenintegral von f wegunabhängig, denn

$$0 = \int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2^*} f(z)\,dz,$$

also

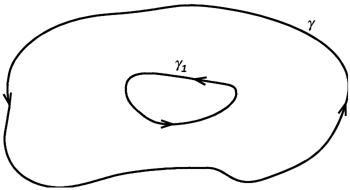
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz,$$

siehe nachfolgende Abb. 10.12

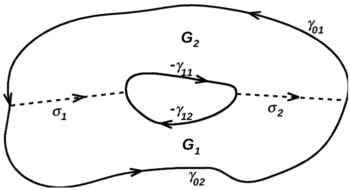


Wegunabhängigkeit des Integrals analytischer Funktionen

Mehrfach zusammenhängende Gebiete



Zweifach zusammenhängendes Gebiet



Aufteilung eines zweifach zusammenhängenden Gebiets ($\gamma = \gamma_{01} \cup \gamma_{02}, \gamma_1 = \gamma_{11} \cup \gamma_{12}$)

Es gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz,$$

wobei das von γ und γ_1 berandete Gebiet 2fach zusammenhängend ist. Nachweis: Integration oben herum und unten herum ergibt Null, Addition beider Integrale liefert die Behauptung.

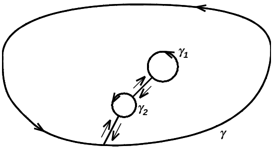
Integral über mehrfach zusammenhängende Gebiete

Seien $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ geschlossene, doppelpunktfreie, stückweise glatte, positiv (d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn) orientierte Kurven, wobei die Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ im Innern von γ liegen und weder sich gegenseitig noch die Kurve γ berühren. Die Punkte, die im Innern von γ, aber außerhalb der von den Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ umschlossenen Gebiete $G_1, G_2, \ldots, G_n$ liegen, bilden ein n-fach zusammenhängendes Gebiet G.

$f(z)$ sei in G einschließlich der Ränder $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (d.h. etwa in einem G und die Randkurven $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ enthaltenden, n-fach zusammenhängenden Gebiet D) analytisch.

Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz \; .$$

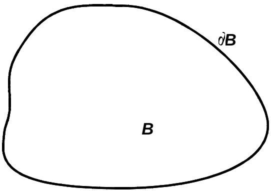


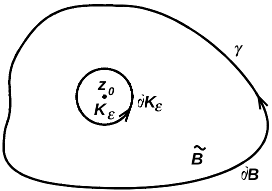
Integrationswege in mehrfach zusammenhängenden Gebieten

Satz 10.6: Cauchy Integralformel

Ist f eine in einem Gebiet G analytische Funktion und z_0 ein innerer Punkt des Bereiches $B \subset G$. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$





Skizze zur Cauchy Integralformel; $\tilde{B} = B \setminus K_\epsilon(z_0)$

Bew.: $\int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\partial K_\epsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} i f(z_0 + re^{it}) dt$
$\to f(z_0) 2\pi i$ für $r \to 0$.

Folgerungen aus der Cauchy Integralformel

i.) Satz 10.7 (Integralformel für die n-te Ableitung): Vor. wie in Satz 10.6. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Insbesondere ist f $\infty-$oft komplex differenzierbar.

ii.) $\mathcal{C}$ sei geschlossene Kurve und f analytisch in dem von $\mathcal{C}$ berandetem Gebiet G. Dann sind die Funktionswerte von f in G durch die Werte von f auf $\mathcal{C}$ festgelegt.

iii.) Mit den Vor. aus ii.) seien f, g in G analytische Funktionen mit $f = g$ auf $\mathcal{C}$. Dann gilt schon $f = g$ in G.