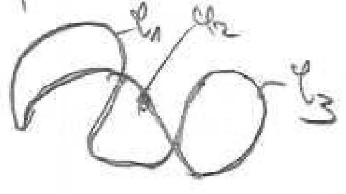
Bew.:
$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$$
$$= \int_a^b F'(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$$
$$= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$
$$= F(B) - F(A)$$

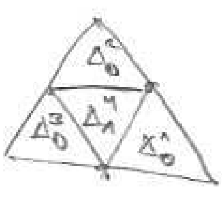
Cauchy-Integralsatz (Hauptsatz der Funktionentheorie)

Satz: Sei $f: G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch, G einfach zshgd, $\mathcal{C} \subset G$ geschlossene, doppelpunktfreie Kurve. Dann gilt
$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0$$

Bemerk.: Satz auch erweiterbar auf Situationen mit endlich vielen Überschneidungen



Bew.: Für Dreiecke nach Goursat $\Delta_0 \subset \mathbb{C}$, d.h. $\mathcal{C} = \Delta_0$:
Es gilt



$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_0^j} f(z)\,dz$$

Damit

$$\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \le 4 \max_j \left|\int_{\partial\Delta_0^j} f(z)\,dz\right|$$

Wähle $\Delta_1 = \Delta_0^j = \underset{k}{\arg\max} \left|\int_{\partial\Delta_0^k} f(z)\,dz\right|$

Dann $\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \le 4 \left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right|$

Konstruktion auf Δ_1 übertragen. Dann induktiv

$$\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right|$$

und $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n \dots$ mit

$$\text{Länge}(\partial\Delta_n) = 2^{-n}\,\text{Länge}(\partial\Delta_0) \Rightarrow \bigcap_{n\geq 0} \Delta_n = \{z_0\}$$

Es gilt (da f differenzierbar)

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + K(z)$$

mit $\lim_{z\to z_0} \frac{|K(z)|}{|z-z_0|} = 0$

Damit

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\partial\Delta_n} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\,dz}_{=0,\ \text{da Stammfunktion existiert}} + \int_{\partial\Delta_n} (z-z_0)\frac{K(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$= f(z_0)z + \tfrac{1}{2} f'(z_0) z^2 - f'(z_0) z_0 z$$

Damit

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \le \left|\int_{\partial\Delta_n} (z-z_0)\frac{K(z)}{z-z_0}\,dz\right|$$

$$\le \text{Länge}(\partial\Delta_n) \max_{z\in\partial\Delta_n}\left(|z-z_0|\frac{|K(z)|}{|z-z_0|}\right)$$

$$\le \text{Länge}(\partial\Delta_n)^2 \max_{z\in\Delta_n}\frac{|K(z)|}{|z-z_0|}$$

$$= 4^{-n}\,\text{Länge}(\partial\Delta_0)^2 \max_{z\in\Delta_n}\frac{|K(z)|}{|z-z_0|}$$

Also

$$\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \le 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \le \text{Länge}(\partial\Delta_0)^2 \underbrace{\max_{z\in\Delta_n}\frac{|K(z)|}{|z-z_0|}}_{\to 0\ (n\to\infty)}$$

$\boxtimes$

<u>Bem.:</u> Hat Gebiet G Löcher, gilt der Satz idR nicht.

<u>Bsp</u>: i) $\int_{\mathcal{C}} z^2+3z\,dz = 0$ für jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve $\mathcal{C}$.

ii) $\int_{K_r(0)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0$, da $\frac{1}{z}$ auf $K_r(0)$ <u>nicht</u> analytisch.