Berechnung von Integralen

i.) über Wege

ii) mit Stammfunktionen

Bsp: $\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2}\, dz = ?$

i) $\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2}\, dz \underset{-b\le t\le b}{\overset{\gamma(t)=a+it}{=}} \int_{-b}^{b} \frac{i}{(a+it)^2}\, dt$

$= -\frac{i}{a+it}\Big|_{-b}^{b} = \frac{2ib}{a^2+b^2}$

ii) $F(z) = -\frac{1}{z}$ Stammfunktion

Daher $\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2}\, dz = -\frac{1}{z}\Big|_{a-ib}^{a+ib} = \frac{2ib}{a^2+b^2}$

Kandidat für Stammfunktion von f:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$$

Achtung: Sinnvolle Definition hier erfordert Weg-Unabhängigkeit der Integration! 2 →

Cauchy-Integralsatz

Sei $f: \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ analytisch, G sei einfach zusammenhängend, $\mathcal{C} \subset G$ geschlossene, doppelpunktfreie Kurve. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 0$$

200505

Bew.: mit Satz von Green

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt = (*)$$

$f = u + iv$, $\gamma = x + iy$

Damit

$$(*) = \int_a^b u\dot x - v\dot y + i(u\dot y + v\dot x)\,dt$$

Satz von Green: $v = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ Vektorfeld und γ umschließt $G \subset \mathbb{R}^2$ und berandet G: Dann $dx = \begin{pmatrix}dx_1\\ dx_2\end{pmatrix}$

$$\int_\gamma v \cdot dx = \int_\gamma \alpha\,dx_1 + \beta\,dx_2$$

$$= \int_G \operatorname{rot} v\,dx = \int_G \beta_{x_1} - \alpha_{x_2}\,dx$$

(2) Beachte: $\int_\gamma \alpha\,dx_1 + \beta\,dx_2 = \int_a^b \alpha\dot x_1 + \beta\dot x_2\,dt$

Damit

$$\int_a^b u\dot x - v\dot y\,dt \underset{\beta = -v}{\overset{\alpha = u}{=}} \int_G -v_x - u_y\,d(x,y) \underset{v_x = -u_y}{\overset{\text{CR-Dgl.en}}{=}} 0$$

und

$$\int_a^b u\dot y + v\dot x\,dt \underset{v = \alpha}{\overset{u = \beta}{=}} \int_G u_x - v_y\,d(x,y) \underset{u_x = v_y}{\overset{\text{CR-Dgl.en}}{=}} 0$$

$$\Rightarrow (*) = \int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0$$

200509

Folgerungen aus dem Cauchy Integralsatz

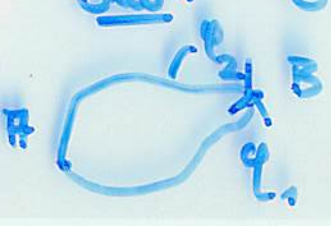
i) Sei $f : \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ analytisch, G einfach zshgd und $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 2 verschiedene Wege von A nach B in $\mathbb{C}$

Dann gilt

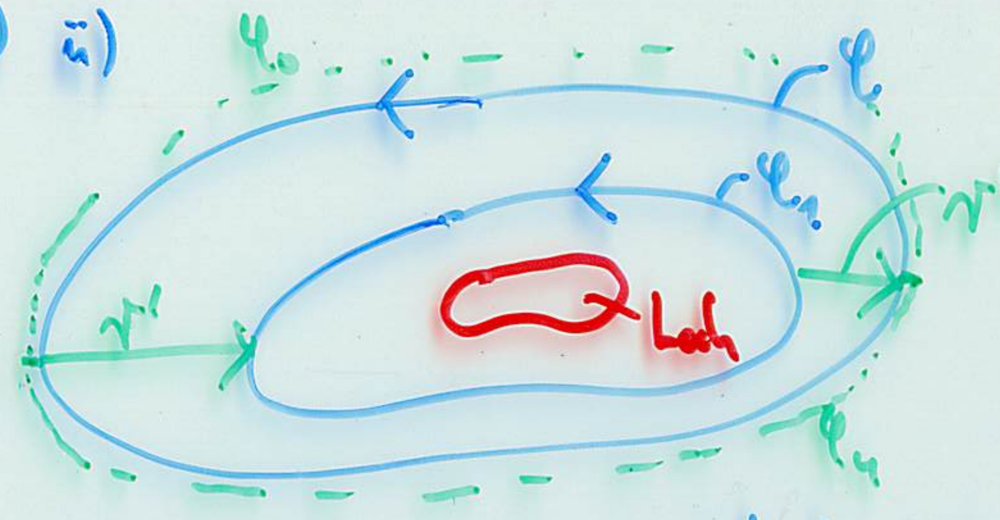
$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)\,dz \,,$$

d.h. Integration analytischer Funktion weg-unabhängig!

Bew.: $0 = \int_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2^*} f(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z)\,dz - \int_{\mathcal{C}_2} f(z)\,dz$



③ ii)



Sei $f : \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ analytisch und $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$ zwei geschlossene Wege in G, welche dieselbe Ausnahmemenge (= Löcher) umschließen und in gleicher Richtung durchlaufen werden. Dann

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z)\,dz$$

Wir haben: $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_u$ und

$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_{1o} \cup \mathcal{C}_{1u}$

200509

Damit gilt

$$0=\int_{\underbrace{C_0 \cup \gamma' \cup C^*_{10} \cup \gamma''}_{=:\,\Gamma'}} f(z)\,dz \quad \text{und}$$

$$0=\int_{\underbrace{C_{11} \cup \gamma''^* \cup C^*_{11} \cup \gamma'^*}_{=:\,\Gamma''}} f(z)\,dz$$

Damit

$$0=\int_{\Gamma'} f(z)\,dz+\int_{\Gamma''} f(z)\,dz$$

$$=\int_{\Gamma'\cup\Gamma''} f(z)\,dz$$

$$=\int_{C^*_{10}\cup C^*_{11}\cup C_0\cup C_{11}} f(z)\,dz=\int_{C} f(z)\,dz-\int_{C_{11}} f(z)\,dz$$

(4)

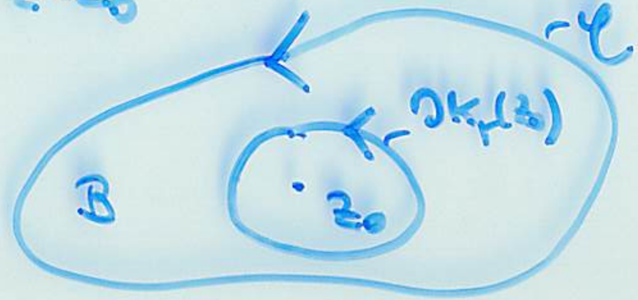
Cauchy Integralformel

Sei $f: \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ analytisch, G Gebiet, $B \subseteq G$ werde von positiv orientierten Weg C umschlossen und berandet. $z_0 \in B$ sei innerer Punkt. Dann gilt

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

<u>Nachweis</u>: $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ ist analytisch in $G\setminus\{z_0\}$

Loch $= z_0$



200509

Dann gilt für alle $r > 0$:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

$$\underset{t \in [0,2\pi]}{\overset{\gamma(t) = z_0 + r e^{it}}{=}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{r e^{it}}\, i r e^{it}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i\, f(z_0 + r e^{it})\, dt$$

$$\xrightarrow{r \to 0} f(z_0)\, 2\pi i$$

$$\to f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

(5) Folgerungen (Vor. wie Cauchy Integralsatz)

i.)

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz,$$

$n \in \mathbb{N}$, d.h. f ist dann ∞-oft komplex diffbar!

<u>Nachweis:</u> Induktion über n

$n = 0$ ✓

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{d}{dz_0} f^{(n-1)}(z_0) = \frac{d}{dz_0}\left[\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\, dz\right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \frac{d}{dz_0} \frac{1}{(z-z_0)^n}\, dz$$

$$= \frac{n(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

Folgerungen weiter

ii) f analytisch in G. Wird z_0 von $\mathcal{C}$ umlaufen, so ist $f(z_0)$ vollständig durch die Werte von f auf $\mathcal{C}$ bestimmt!

iii) $\tilde{f}$ entsteht aus f durch Abänderung im Innern des von $\mathcal{C}$ umschlossenen Gebiets und $\tilde{f} = f$ auf $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ kann nicht analytisch sein

iv.) $f = g$ auf $\mathcal{C}$, f, g analytisch
$\Rightarrow$ $f = g$ auf von $\mathcal{C}$ umschlossenen Gebiet.