080509

Möbiustransformationen bilden Kreise in $\mathbb{C}^*$ auf solche ab.

<u>Satz</u>: $z \in \mathbb{C}^*$ liegt auf $K(z_1, z_2, z_3)$ ($\equiv$ Kreis durch z_1, z_2, z_3), falls

$$DV(z; z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

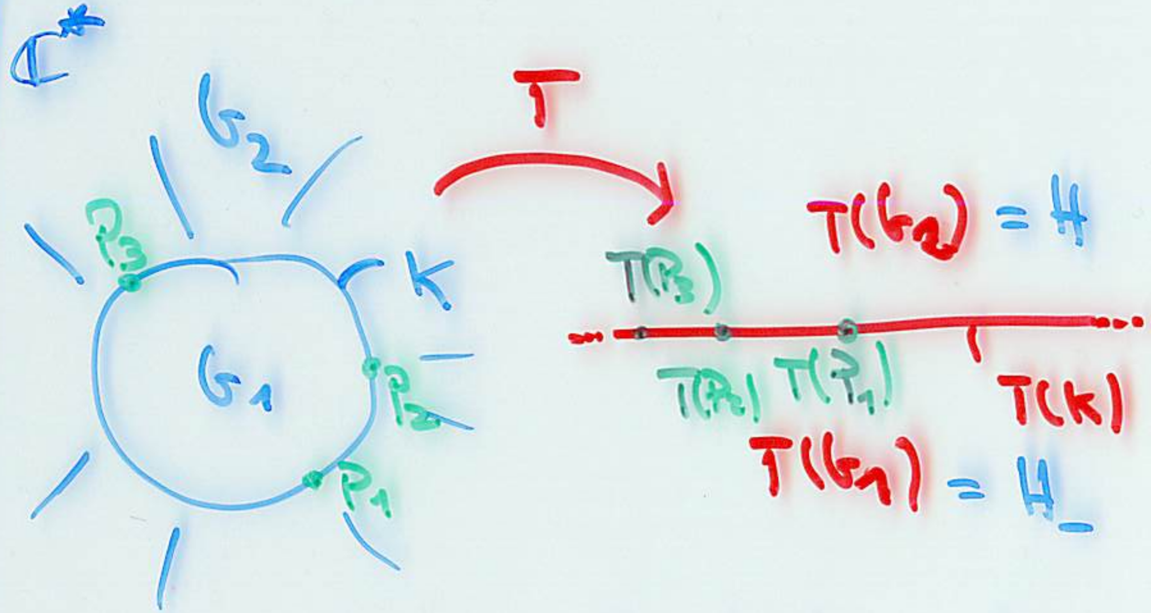
<u>Bew Idee</u>: T mit $T(z_i) = (0, 1, \infty)$ für $i = 1, 2, 3$

$\in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

① und $T(z) = DV(Tz; 0, 1, \infty) =$

$= DV(z; z_1, z_2, z_3)$

<u>Anwendung</u>: $\mathbb{C}^* = G_1 \cup K \cup G_2$



T mit $T(K) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann

$$\left.\begin{array}{l} T(G_1) = H := \{z;\ \operatorname{Im} z > 0\} \\ T(G_2) = H_- := \{z;\ \operatorname{Im} z < 0\} \end{array}\right\} \text{ oder umgekehrt}$$

080503

Satz: $G \subset \mathbb{C}^*$ berandet von einem Kreis ($\equiv$ Kreis oder Geraden) Dann gibt es eine Möbiustransformation mit $T(G) = H$

Bsp: i) $T(z) = DV(z;\ 1, i, -1)$

Damit gilt für $D = \{z;\ |z| < 1\}$

$T(\partial D) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $T(D) = H$

Hier $T(z) = i\,\dfrac{1-z}{1+z}$ $\qquad \partial K_1(2+i)$

ii) $T(\partial D) \stackrel{!}{=} \{z;\ |z-2-i| = 1\}$

$z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -1 \to z_i \in \partial D$

$w_1 = 2,\ \underline{w_2 = 2i}^{\,+2i},\ w_3 = 1+i \to w_i \in \partial K_1(2+i)$

②

$\dfrac{2i}{1+i}$

$$\frac{z-1}{z+1} : \frac{i-1}{i+1} = \frac{w-2}{w-1-i} : \cancel{\frac{2i-2}{i-1}}$$

$$\to w = T(z) = \cancel{\frac{-2(1+i)z - 2(1-3i)}{-(3+i)z + 3i + 1}}$$

iii) $T(D) \stackrel{!}{=} H_-$

$z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -1$

$w_1 = 1,\ w_2 = 0,\ w_3 = -1$

Damit

$$T(z) = \frac{zi+1}{z+i}$$

Korrektur zur linken Seite:

s. oben, Umformung selber

Komplexe Differenzierbarkeit

Def.: $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Funktion. f heißt in $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar (kurz: diffbar), falls

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

existiert. f heißt analytisch (holomorph) in G, falls $f'(z)$ für alle $z \in G$ existiert.

Bsp: $f(z) = z^2 \rightarrow f'(z) = 2z$

Bsp

G	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^-$	$\mathbb{C}^-$	$\mathbb{C}$
$f(z)$	e^{az}	$\sin z$	$\cos z$	$\mathrm{Log}\, z$	$\sqrt{z}$	$z^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{R})$
$f'(z)$	$a e^{az}$	$\cos z$	$-\sin z$	$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{2\sqrt{z}}$	$\alpha z^{\alpha - 1}$

Charakterisierung analytischer Funktionen

Schreibe $f(z) = u(z) + i\, v(z)$

mit $z = x + iy$ und

$u, v: G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$

Sei f in z_0 komplex diffbar. Was heißt das für u, v?

080509

Mit $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $\lim\limits_{k\to\infty} h_k = 0$

beliebige Nullfolge gilt

$$f'(z_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_0+h_k)-f(z_0)}{h_k}$$

i) Wähle z.B. $h_k = x_k + i\,0$

Damit $(z_0 = x_0 + i y_0)$

$$f'(z_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_0+x_k+iy_0)-f(x_0+iy_0)}{x_k}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{u(x_0+x_k,y_0)-u(x_0,y_0)}{x_k} + i\,\frac{v(x_0+x_k,y_0)-v(x_0,y_0)}{x_k}\right]$$

$$\underset{\text{existiert}}{\overset{\text{Grenzwert}}{=}} u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0)$$

4

$\Rightarrow$ [f komplex diffbar in z_0, d.h. $f'(z_0)$ ex. $\Rightarrow$ $u_x(x_0,y_0)$, $v_x(x_0,y_0)$ existieren].

ii) Wähle z.B. $h_k = 0 + i y_k$

Damit

$$f'(z_0) = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{u(x_0,y_0+y_k)-u(x_0,y_0)}{i y_k} + i\,\frac{v(x_0,y_0+y_k)-v(x_0,y_0)}{i y_k}\right]$$

$$= -i\, u_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0)$$

$\Rightarrow$ $u_y(x_0,y_0)$, $v_y(x_0,y_0)$ ex.

Insgesamt: u, v partiell diffbar

Hauptfolgerung

$$u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0)$$
$$= v_y(x_0,y_0) - i\, u_y(x_0,y_0)$$

d.h. $u_x = v_y$ und $v_x = -u_y$

Cauchy-Riemann DGLen

Merke: $F(x,y) := \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$

F diffbar allein reicht nicht aus, um f komplex diffbar zu folgern.

Satz: Sei $F(x,y) := \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$ mit $u, v : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig partiell diffbar. Dann ist

$$f(z) := u(z) + i\, v(z)$$

genau dann analytisch in G, wenn die CR DGLen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad v_x = -u_y$$

in G erfüllt sind.

Bsp: i.) $f(z) = z^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i\, \underbrace{2xy}_{v(x,y)}$

$u_x = 2x = v_y$ ✓ $\quad v_x = 2y = -(-2y) = -u_y$

d.h. CR DGLen erfüllt.

080509

ii) $f(z) = |z|^2 = x^2+y^2$

$u(x,y) = x^2+y^2, \quad v(x,y) = 0$

u, v ∞-oft partiell diffbar,

aber $u_x = 2x \neq 0 = v_y$ $(x \neq 0)$

$\Rightarrow$ f nicht analytisch.

iii) $f(z) = \bar{z} = x - iy$

$u(x,y) = x, \quad v(x,y) = -y$

$u_x = 1 \neq v_y = -1$

$\rightarrow$ f nicht analytisch

Was machen analytische Abb'en?

Sei f in z_0 komplex diffbar

(6)

$f = u + iv, \quad F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$

Dann $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in (x_0, y_0) diffbar und daher

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + DF(x_0,y_0) \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} + k(x,y)$$

mit $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{k(x,y)}{|z-z_0|} = 0$

Es gilt

$$DF(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{CRDGLen}}{=} \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ -u_y(x_0,y_0) & u_x(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

080509

Beh.: Die lineare Abb

$$v \longmapsto DF(x_0,y_0)\, v$$

ist winkeltreu, d.h.

mit $v, w \in \mathbb{R}^2$ und

$$a = DF(x_0,y_0)\, v$$

$$b = DF(x_0,y_0)\, w$$

gilt

$$\sphericalangle(v,w) = \sphericalangle(a,b)$$

mit gleicher Orientierung