240409

Möbius-Transformationen

$$z \mapsto T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$ gebrochen rational

mit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$,
heißt Möbius Transformation

Allgemeine rationale Funktion

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad p, q \text{ Polynome}$$

Erweiterung des Zahlbereichs

$$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

(1)

"∞" heißt unendlich ferner Punkt.

Setze $R(z^*) := \infty$, falls $p(z^*) \neq 0$
und $q(z^*) = 0$.

Rechenregeln: (zusätzlich zu [illegible] vorhandenen)

$$a + \infty := \infty$$
$$a \cdot \infty := \infty \qquad \forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$
$$a / \infty := 0 \qquad \text{—"—}$$

Setze $z_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty \; :\Leftrightarrow$
$\frac{1}{z_n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Damit wird $\mathbb{C}^*$ folgenkompakt

$\mathbb{C}^*$ heißt "Einpunkt Kompaktifizierung" von $\mathbb{C}$

240409

Zurück zu Möbius Transformation

Diese erfüllen

i.) $T(-d/c) = \dfrac{a(-\frac{d}{c}) + b}{0}$

$= \infty$ weil $ad - bc \neq 0$

ii.) $T: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ bijektiv

mit $T^{-1}(w) = \dfrac{dw - b}{a - cw}$

$\rightarrow$ nachrechnen

iii.) Jeder Möbius Transformation

$T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ entspricht

invertierbare 2x2 Matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

②

iv.) $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $S(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$

Dann

$$(S \circ T)(z) = \frac{(\alpha a + \beta c) z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c) z + (\gamma b + \delta d)},$$

d.h. $\quad S \circ T \;\hat{=}\; \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Struktur von Möbius-Transformation

$T(z)$ ist Komposition aus

Translation $\quad z \longmapsto z + \beta$

Drehstreckung $\quad z \longmapsto \alpha z$

Inversion $\quad z \longmapsto \dfrac{1}{z}$, weil

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \, \frac{1}{cz+d}$$

240409

Fixpunkte: $z_0 \in \mathbb{C}^*$: $T(z_0) = z_0$

$c = 0$: $T(z_0) = \dfrac{a z_0 + b}{d} \overset{!}{=} z_0$

$\rightarrow$ $z_0 = \infty$ bzw

$z_0 = \dfrac{b}{d-a}$, $a \neq d$

$c \neq 0$: $T(z_0) = z_0$ gdw

$c z_0^2 + (d-a) z_0 - b = 0$

Zsg: $T \neq Id$ $\rightarrow$ T besitzt genau einen oder zwei Fixpunkte

Damit

③

Satz: Eine Möbius-Transformation ist durch die Vorgabe der Bilder 3er verschiedener Punkte eindeutig festgelegt, d.h.

(*) $T_1(z_i) = T_2(z_i)$ $i = 1,2,3$, $z_i \neq z_j$

$\Rightarrow$ $T_1 \equiv T_2$

Nachweis: Es gelte (*) und IA: $T_1 \neq T_2$.

$S := T_2^{-1} \circ T_1$ erfüllt

$S(z_i) = z_i$ $i = 1,2,3$

$\Rightarrow$ $S = Id$, weil S mehr als 2 Fixpunkte besitzt.

110109

④

Das Doppelverhältnis

Ziel: (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) Tripel aus $\mathbb{C}^*$. Dann ex. genau eine Möbius Transformation T mit

$$T(z_i) = w_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Betrachte dazu das Doppelverhältnis

$$T(z) = DV(z; z_1, z_2, z_3)$$

$$:= \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

Dabei $T(\infty) = \dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$,

$$DV(z; \infty, z_2, z_3) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$$

$$DV(z; z_1, \infty, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

$$DV(z; z_1, z_2, \infty) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Damit gilt

$$DV(z_1; z_1, z_2, z_3) = 0$$

$$DV(z_2; z_1, z_2, z_3) = 1$$

$$DV(z_3; z_1, z_2, z_3) = \infty$$

Damit $T(z_i) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ 1 & i = 2 \\ \infty & i = 3 \end{cases}$

Analog $S(w) := DV(w; w_1, w_2, w_3)$

erfüllt $S(w_i) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ 1 & i = 2 \\ \infty & i = 3 \end{cases}$

240109

Damit erfüllt

$$M := S^{-1} \circ T$$

$M(z_i) = w_i \qquad i = 1, 2, 3$,

d.h. $\quad T(z_i) = S(w_i) \qquad i = 1, 2, 3$

d.h.

(1) $\quad DV(w, w_1, w_2, w_3) = DV(z, z_1, z_2, z_3)$

<u>Satz</u>: z_1, z_2, z_3 mit $z_i \neq z_j$,

$z \in \mathbb{C}^*$. Dann

$$DV(z; z_1, z_2, z_3) = \underbrace{DV(T(z); T(z_1), T(z_2), T(z_3))}_{=: S(z)}$$

<u>Nachweis</u>: $z \mapsto S(z)$ Möbius Transf.

(5) mit

$S(z_1) = 0$, $S(z_2) = 1$, $S(z_3) = \infty$

und

$DV(z; z_1, z_2, z_3)$ erfüllt

$$DV(z_i, z_1, z_2, z_3) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ 1 & i = 2 \\ \infty & i = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad S(z) = DV(z; z_1, z_2, z_3) \quad \blacksquare$

<u>Bsp</u>: $\quad z_1 = 1, \; z_2 = i, \; z_3 = -1$

$\qquad w_1 = 1, \; w_2 = 0, \; w_3 = -1$

Mit (1)

$$\frac{w-1}{w+1} : \frac{0-1}{0+1} = \frac{z-1}{z+1} : \frac{i-1}{i+1}$$

$$\Rightarrow \quad w = T(z) = \frac{zi+1}{z+i}$$

24.04.09

Hauptsatz: Möbius-Transformationen führen Geraden und Kreislinien in Geraden oder Kreislinien über.

Nachweis: Es reicht, diese Eigenschaft für die Inversion

$$z \longmapsto \frac{1}{z}$$

nachzuweisen, weil Translationen und Drehstreckungen die bekannte Eigenschaft besitzen.

$$K = \{ z : \alpha z\bar{z} + c z + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0 \text{ mit } \alpha, \delta \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{C},\ c\bar{c} > \alpha\delta \}$$

denn $(c = c_1 + i c_2,\ z = x + iy)$

$\alpha = 0$: $c z + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0$ gdw

$2(c_1 x + c_2 y) + \delta = 0$

$\alpha \neq 0$: $K = \{ (x,y) ; (x + \frac{c_1}{\alpha})^2 + (y - \frac{c_2}{\alpha})^2 = \frac{c\bar{c} - \delta\alpha}{\alpha^2} \}$

Bh.: $w = \frac{1}{z}$ erfüllt für $z \in K$

$$\alpha + \bar{d}\bar{w} + d w + \delta w \bar{w} = 0$$

mit $d := \bar{c}$, d.h. w erfüllt Kreisgleichung!

Nachweis: $w\bar{w} \cdot 0 =$

$= w\bar{w}\,\alpha z\bar{z} + w\bar{w}\,c z + w\bar{w}\,\bar{c}\bar{z} + w\bar{w}\,\delta$

$\overset{w=\frac{1}{z}}{=} \alpha + \bar{w} c + w \bar{c} + w\bar{w}\,\delta$

$= \alpha + \bar{d}\bar{w} + d w + w\bar{w}$